Zadania ze statystyki lista nr 1.

Zadanie 1. Czy jest możliwe, by $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,3$, i zdarzenia A i B były niezależne.

Zadanie 2. Zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A) = P(B) = p$. Oblicz $P(A \cup B)$.

Zadanie 3. Zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4 są niezależne i $P(A_k) = p_k$. Oblicz prawdopodobieństwo zajścia co najmniej jednego z tych zdarzeń.

Zadanie 4. Zdarzenia A i B mają następujące prawdopodobieństwa: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(A|B) = 1/8$. Obliczyć prawdopodobieństwo,że nie zajdzie ani jedno ze zdarzeń A i B.

Zadanie 5. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie "w pierwszym i drugim rzucie wypadła ta sama liczba oczek", B zaś oznacza zdarzenie "w drugim rzucie wypadło conajmniej 5 oczek". Sprawdzić czy zdarzenia A i B są niezależne.

Zadanie 6 Pewna choroba występuje u 0.1% ogółu ludności. Przygotowano test do jej wykrycia. Test daje wynik pozytywny u 97% chorych i 1% zdrowych. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba jest chora jeżeli test tej osoby dał wynik pozytywny.

Zadanie 7. Na kwadratowej tarczy o boku 20cm jest narysowany okrąg centralnie o promieniu 5cm. Strzał do tarczy pozostawić otwór o średnicy 2cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otwór przebija linię okręgu?

Zadanie 8. Ściana domku jest pomalowana w systematyczne pasy białe (szerokości 12cm), żółte (szerokości 6cm) i fioletowe (szerokości 2cm). Na scianie usiadło 20 owadów. Oblicz ile należy oczekiwać owadów na pasach żółtych jeśli przyjąć, że kolory te są dla owadów obojętne.

Zadanie 9. Prawdopodobieństwo zagrożenia pożarem w dużej fabryce chemmicznej wynosi 0.02. W fabryce zainstalowany jest system alarmowy. W sytuacji awaryjnej system zawodzi w 1% przypadków. Fałszywy alarm systemu zdarza się w 5% przypadków. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że kolejny alarm okaże się fałszywy.

Zadanie 11. Na dziesięciu klockach wyrzeźbiono litery $a, a, k, s, s, t, t, t, y, y$. Bawiąc się nimi dziecko układa je w rząd. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przypadkowo ułoży słowo *statystyka*.

Zadanie 12. Na szczyt góry prowadzi 5 dróg. Każda z nich nadaje się również do zejścia. Zakładamy ponadto, że wszystkie trasy są równorzędne. Obliczyć prawdopodobieństwo spotkania się dwóch znajomych z których jeden wchodzi na szczyt a drugi jest w drodze powrotnej.

Zadanie 13. Pięciu studentów powtarzających dany rok studiów wybiera losowo każdy niezależnie od pozostałych, jedną z trzech równoległych grup. Zakładając, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, znaleźć prawdopodobieństwo tego, że

(a) wszyscy znajdą się w pierwszej grupie;
(b) wszyscy znajdą się w tej samej grupie;
(c) w pierwszej grupie znajduje się dokładnie jeden student.

Zadanie 14. W partii N sztuk towaru, wśród których jest M sztuk zgodnych z normą losujemy n sztuk

(a) ze zwrotem;
(b) bez zwrotu.

Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich znajduje się k sztuk zgodnych z normą.

Zadanie 15. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że przy losowaniu 5 kart z 52

(a) wszystkie karty są tego samego koloru;
(b) są wśród nich 4 asy.

Zadanie 16. Z 10 pracowników należy utworzyć:

(a) dwa zespoły liczące po 4 i 6 pracowników;
(b) trzy zespoły liczące po 5 3 i 2 pracowników
(c) pięć zespołów dwuosobowych.

Dla każdego podziału znaleźć prawdopodobieństwo, że dwóch ustalonych pracowników znajdzie się w jednym zespole przy założeniu, że podział na zespoły odbywa się losowo.

Zadanie 17. Pewien towar produkują 3 zakłady. Prawdopodobieństwo wyprodukowania przez te zakłady towaru pierwszej jakości wynosi odpowiednio $0,97$, $0,90$ $0,86$. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo wzięta sztuka towaru - spośród trzech pochodzących z różnych zakładów jest różnej jakości.

Zadanie 18. Tenisista musi wygrać dwa mecze pod rząd z trzech. Może grać a) z lepszym ze słabszym i znów z lepszym b) ze słabszym z lepszym i znów ze słabszym. Który wybór daje większe szanse jeśli wyniki kolejnych meczów są niezależne.

Zadanie 19. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa sięga do wybranej losowo kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko w drugim będzie k zapałek? $(k = 1, 2, \ldots, m)$ gdzie m jest liczbę zapałek w pełnym pudełku. Zakładamy, że w chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka.

Zadanie 20. W ramach bieżącej kontroli jakości produkcji okreesowo sprawdza się kolejno produkowane sztuki towaru, jednak nie więcej niż 4 i w przypadku stwierdzenia sztuki wadliwej proces produkcji poddaje się regulacji. Liczba sztuk sprawdzonych w trakcie jednej takiej kontroli jest więc zmienną losową X. Ponadto przyjmujemy, że: a) prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej sztuki towaru wynosi $p = 0,06$. b) jakości kolejno produkowanych sztuk są zdarzeniami niezależnymi. Dla zmiennej losowej X wyznaczyć

(a) funkcję prawdopodobieństwa,

(b) dystrybuantę,

(c) wartość przeciętną.

Zadanie 21. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla} \quad x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$$

Wyznacz wartość średnią oraz odchylenie standardowe zmiennej losowej X.

Zadanie 22. Pojedynek przebiega według następujących zasad. Każdy z przeciwników otrzymuje rewolwer bębenkowy z jednym nabojem umieszczonym w jednej z pięciu komór rewolweru (pozostałe cztery komory są puste) i wielorotnie obraca bębenek następnie jeden z nich pociąga za spust i tylko w przypadku niezranienia próbuje oddać strzał drugi przeciwnik. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pojedynek skończy się bezkrwawo, gdy prawdopodobieństwo trafienia do celu dla każdego przeciwnika jest jednakowe i wynosi $0,8$.

Zadanie 23. Aby oszacować liczbę ryb w stawie wyławia się 1000 ryb, oznacza się je i wpuszcza z powrotem. Dla jakiej ilości ryb w stawie prawdopodobieństwo otrzymania wśród 150 nowo złowionych ryb 10 oznaczonych będzie największe.

Zadanie 24. Obliczyć prawdopodobieństwo przyjęcia partii N sztuk towaru, wśród których jest n sztuk wadliwych, jeśli partię przyjmuje się, gdy w m elementowej próbce (losowanej bez zwrotu) z tej partii znajdzie się co najwyżej jedna sztuka niedobra. Wykonać rachunki jeśli a) $N = 50$, $m = 8$ a $n = 5$ b) $N = 200$ $m = 20$ a $n = 10$.

Zadanie 25. W 1693 roku Johnowi Smithowi zadano następujące pytanie: czy trzy osoby, z których pierwsza chce otrzymać conajmniej jedną szóstkę przy 6 rzutach kostką, druga co najmniej 2 szóstki przy 12 rzutach kostką, a trzecia - conajmniej 3 szóstki przy 18 rzutach kostką mają jednakowe szanse?

Zadanie 26. Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.

Zadanie 27. Prawdopodobieństwo trafienia „szóstki ”w Toto-Lotku jest równe $1/\binom{49}{6} = 1/139883816$. Ilu szóstek należy się spodziewać w każdym tygodniu, jeśli grający wypełniają kupony niezależnie od siebie i całkowicie losowo, kuponów jest $n = 10^7$?