1 Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu lista nr.1

1.1 Wprowadzenie

Zadanie 1. W pewnym zagajniku rosną tylko dwa gatunki drzew: 1200 grabów i 800 dębów. Stwierdzono też, że 30% drzew ma dziuple, przy czym obecność dziupli jest zjawiskiem niezależnym od gatunku drzewa. Oszacuj prawdopodobieństwo, że losowo wybrane drzewo:

- jest dębem;
- jest grabem;
- jest grabem lub dębem;
- nie jest ani grabem ani dębem;
- ma dziuplę;
- nie ma dziupli;
- ma dziuplę lub nie ma dziupli;
- jest dębem z dziuplą;
- jest grabem bez dziupli.

Zadanie 2. W zagajniku z poprzedniego zadania wybrano losowo dwa drzewa. Oszacuj prawdopodobięństwa, że wśród tych drzew:

- oba są grabami;
- pierwsze z wybranych jest grabem, a drugie dębem;
- pierwsze z wybranych jest dębem a drugie grabem;
- tylko jedno jest grabem (wszystko jedno, które)
- żadne nie jest grabem;
- oba mają dziuple;
- oba są grabami i oba mają dziuple

Zadanie 3. Oszacuj prawdopodobieństwa, że przy rzucie dwóch kostek do gry otrzymamy następujące sumy oczek na obydwu kostkach: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$

Zadanie 4. Rzucono 10 razy symetryczną monetą. Oceń prawdopodobieństwo

- wyrzucone zostały same orły;
- same orły lub same reszki;
- co najwyżej dwa orły;
- co najmniej dwa orły;
- co najmniej 11 orłów;
- co najwyżej 11 orłów

1.2 Podstawowe własności rozkładu normalnego

1. Standardowy rozklad normalny $\mathcal{N}(0,1)$
2. Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, to Y ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, gdzie $Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$;
3. Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$, to Y ma rozkład $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ gdzie $Y = \sigma \cdot X + \mu$;
4. $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$;
5. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots X_n$ jest próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ to $\bar{X}$ ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Zadanie 1. Oblicz wartości $\Phi(z)$ dla $z = 0, 1.96, -1, 0.56, -0.25, 1.5, 2.01, 3, 1.75$.

Zadanie 2. Znajdź wartości z, dla których $\Phi(z) = 0.5, 0.05, 0.95, 0.99, 0.90, 0.025, 0.01$

Zadanie 3. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ oblicz:

(a) $P(-0.55 < X < 0.37)$;
(b) $P(0.37 < X < 0.42)$;
(c) $P(-0.55 < X < -0.15)$.

Zadanie 4. Niech zmienna losowa X ma rozkład $\mathcal{N}(2,3)$ oblicz pradopodobieństwa:

(a) $P(X > 2)$;
(b) $P(X < 1)$;
(c) $P(|X-2| < 0.5)$;
(d) $P(X < 1.5)$.

Zadanie 5. Zmienna losowa ma rozkład $\mathcal{N}(12,4)$. Oblicz prawdopodobieństwo $P(X < 15)$.

Zadanie 6. Średnia zawartość Hb we krwi kobiet wynosi $13.7g/100ml$, wariancja 1.58. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo pobrana do badań krew kobiet zawiera co najmniej $12g/100ml$?

Zadanie 7. Dostawca sałaty gwarantuje, że średnia zawartość ołowiu w jego sałacie nie przekracza $0.10ppm$. Kupujący polecił sprawdzić 16 losowo wybranych próbek sałaty i otrzymał w nich średnią zawartość ołowiu $0.11ppm$ z odchyleniem standardowym $0.02ppm$. Oceń czy gwarancja producenta jest uczciwa.

Zadanie 8. W pewnym doświadczeniu medycznym bada się czas snu pacjentów leczonych na pewną chorobę. Zmierzono czas snu u $n = 16$ wylosowanych niezależnie pacjentów i otrzymano następujące wyniki (w minutach): $435, 533, 393, 458, 525, 481, 324, 437, 348,$
$503, 383, 395, 416, 533, 500, 488$. Przyjmując, że czas snu ma rozkład $\mathcal{N}(m, 70)$, oszacować średni m czasu snu pacjentów przyjąc współczynnik ufności 0.99.

Zadanie 9. W pewnym eksperymencie chemicznym bada się czas całkowitego zakończenia reakcji. Dokonano $n = 60$ niezależnych doświadczeń i otrzymano z nich średnią $\bar{x} = 46$ sek oraz odchylenie standardowe $S_n = 13$ sek. Przyjmując współczynnik ufności 0.99 znajdź przedział ufności dla średniego czasu reakcji.

Zadanie 10. W celach antropometrycznych wylosowano $n = 400$ studentów i dokonano pomiarów, mierząc między innymi długość ich stopy. Otrzymano z tej próby $\bar{x} = 26.4$ oraz $S_n = 1.7$ cm. Znajdź 0.90 przedział ufności dla średniej długości stopy.

Zadanie 11. W celu oszacowania średniej miesięcznej kwoty wydatków studentów na rozrywki, wybrano losowo próbę $n = 200$ studentów i otrzymano z niej średnią $\bar{x} = 120$ oraz $S_n = 84$ zł. Znaleźć 0.95 przedział ufności dla średniej.

Zadanie 12. Dokonano $n = 4$ niezależne pomiary gełebokości oceanu w pewnym regionie i uzyskano nastepujące wyniki:

$$4.33, 4.58, 4.47, 4.50$$

Wyznaczyć przedział ufności dla szacowanej średniej głębokości oceanu w tym rejonie, przyjmując współczynnik ufności 0.99.

Zadanie 13. Chcemy oszacować jaki procent pracujących mieszkańców Warszawy jada obiady w stołówkach pracowniczych. Pobrano w tym celu $n = 900$ osób wylosowanych niezależnie do próby i znaleziono w tej probie 300 osób, które jedzą obiady w takich stołówkach. Przyjmując współczynnik ufności 0.95 zbudować przedział ufności dla proporcji osób jadających w stołówkach.

Zadanie 14. Spośród żarówek wykonanych przez pewnę fabrykę wylosowano niezależnie $n = 100$ sztuk i sprawdzono ich jakość. 16 żarówek okazało się złych. Przyjmując współczynnik ufności 0.99 oszacować procent braków w wyprodukowanej partii żarówek.

Zadanie 15. W celu wyznaczenia siły kiełkowania pewnej nowej odmiany grochu, wykonano w pewnym instytucie hodowli roślin doświadczenie polegające na wysadzeniu 800 ziaren grochu tej nowej odmiany i badaniu ile ziaren wykiełkuje. Wykiełkowało 728 ziaren. Przyjmując współczynnik ufności 0.95 oszacować siłę kiełkowania.