Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

21 kwietnia 2012

Korelacja - współczynnik korelacji

1. Gdy badamy różnego rodzaju rodzaju zjawiska (np. przyrodnicze) możemy stwierdzić, że na każde z nich ma wpływ działanie innych czynników;

Korelacja - współczynnik korelacji

1. Gdy badamy różnego rodzaju rodzaju zjawiska (np. przyrodnicze) możemy stwierdzić, że na każde z nich ma wpływ działanie innych czynników;
2. Wydaje się oczywiste, że badanie związków pomiędzy badanymi zjawiskami jest przedmiotem badań statystycznych;

Korelacja - współczynnik korelacji

Przykłady - „z życia”

1. Ilość wypalanych papierosów przez kobietę w trakcie ciąży a waga urodzeniowa noworodka;

Ważne pytania

1. Czy istnieją jakiekolwiek zależności pomiędzy wynienionymi charakterystykami?

Korelacja - współczynnik korelacji

Przykłady - „z życia”

1. Ilość wypalanych papierosów przez kobietę w trakcie ciąży a waga urodzeniowa noworodka;
2. ilość punktów z kolokwium a ilość punktów z egzaminu koncowego;

Ważne pytania

1. Czy istnieją jakiekolwiek zależności pomiędzy wynienionymi charakterystykami?
2. A jeśli tak to jak mierzyć taką zależność?

Korelacja - współczynnik korelacji

Przykłady - „z życia”

1. Ilość wypalanych papierosów przez kobietę w trakcie ciąży a waga urodzeniowa noworodka;
2. ilość punktów z kolokwium a ilość punktów z egzaminu koncowego;
3. szybkość chodzenia a pozycja społeczna;

Ważne pytania

1. Czy istnieją jakiekolwiek zależności pomiędzy wynienionymi charakterystykami?
2. A jeśli tak to jak mierzyć taką zależność?

Korelacja - współczynnik korelacji

Przykłady - „z życia”

1. Ilość wypalanych papierosów przez kobietę w trakcie ciąży a waga urodzeniowa noworodka;
2. ilość punktów z kolokwium a ilość punktów z egzaminu koncowego;
3. szybkość chodzenia a pozycja społeczna;
4. długość snu w ciągu doby a masa ciała.

Ważne pytania

1. Czy istnieją jakiekolwiek zależności pomiędzy wynienionymi charakterystykami?
2. A jeśli tak to jak mierzyć taką zależność?

Korelacja - współczynnik korelacji

Uwaga

Zależność pomiędzy takimi charakterystykami nazywamy **związkiem korelacyjnym** albo **korelacją**.

Zależność funkcyjna - czyli co pamiętamy ze szkoły

Tajemnicza funkcja matematyczna może opisywać zależność pomiędzy zadanymi charakterystykami. Weźmy nasze ulubione ze szkoły:

$$y = f(x),\ y = ax + b,\ y = x^2,\ y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Przykładów ze szkoły jest bardzo dużo.

Zależność funkcyjna - czyli co pamiętamy ze szkoły

Tajemnicza funkcja matematyczna może opisywać zależność pomiędzy zadanymi charakterystykami. Weźmy nasze ulubione ze szkoły:

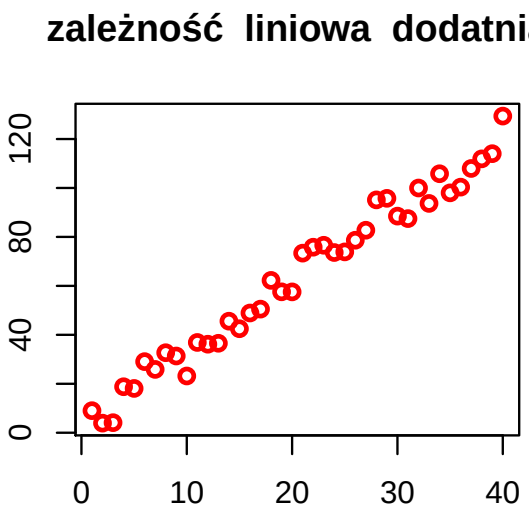
$$y = f(x),\ y = ax + b,\ y = x^2,\ y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

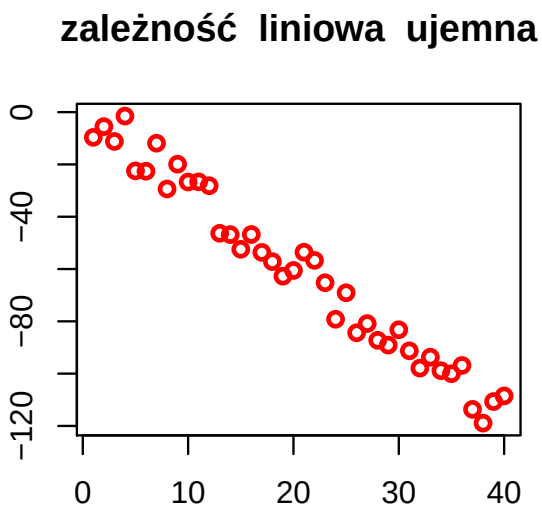
Przykładów ze szkoły jest bardzo dużo.

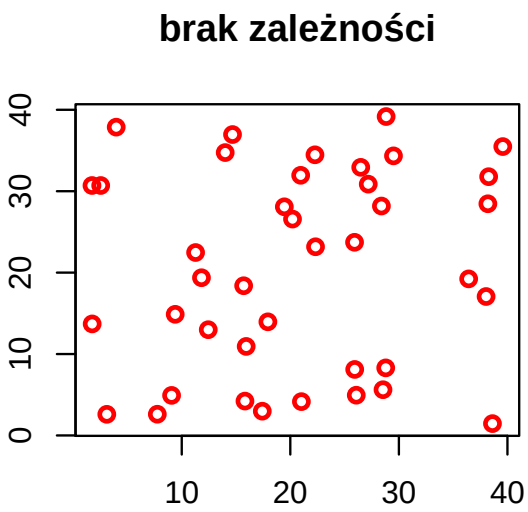
Pytanie

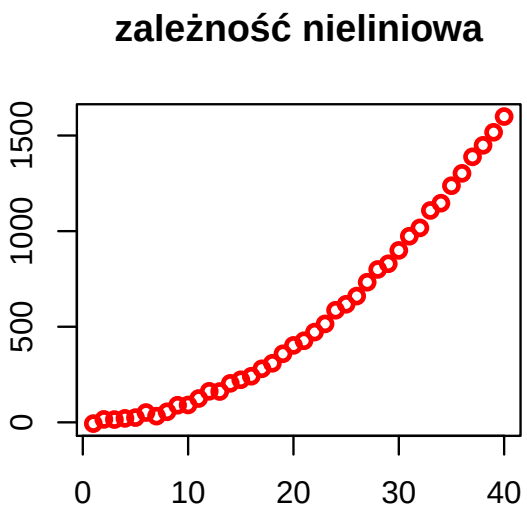
Czy nasze zjawisko da się opisać choćby w przybliżeniu przy pomocy funkcji?

korelacja - współczynnik korelacji









Próbkowy współczynnik korelacji

Definicja

Współczynnikiem korelacji próbkowej nazywamy zmienną losową:

$$r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S_{n_X - 1}}\right)\left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_{n_Y - 1}}\right)$$

Własności próbkowego współczynnika korelacji

1. Próbkowy współczynnik korelacji jest zmienną losową ograniczoną przez liczby -1 i 1;

Uwaga,Uwaga, ...

Wartość $r = 0$ nie świadczy o braku zależności między zmiennymi.

Własności próbkowego współczynnika korelacji

1. Próbkowy współczynnik korelacji jest zmienną losową ograniczoną przez liczby -1 i 1;
2. Znak współczynnika informuje o kierunku zależności (liniowa ujemna lub liniowa dodatnia);

Uwaga,Uwaga, ...

Wartość $r = 0$ nie świadczy o braku zależności między zmiennymi.

Własności próbkowego współczynnika korelacji

1. Próbkowy współczynnik korelacji jest zmienną losową ograniczoną przez liczby -1 i 1;
2. Znak współczynnika informuje o kierunku zależności (liniowa ujemna lub liniowa dodatnia);
3. Wartość bezwzględna $|r|$ informuje o sile korelacji liniowej;

Uwaga,Uwaga, ...

Wartość $r = 0$ nie świadczy o braku zależności między zmiennymi.

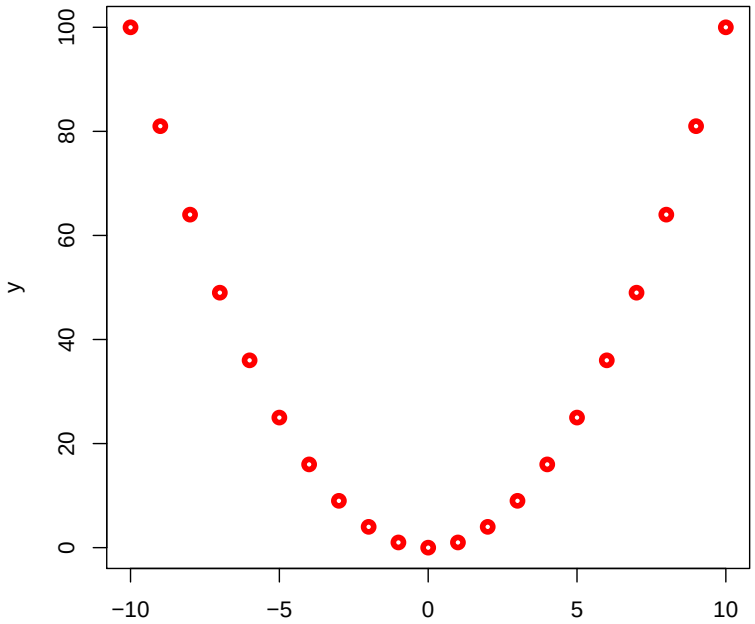
Własności próbkowego współczynnika korelacji

1. Próbkowy współczynnik korelacji jest zmienną losową ograniczoną przez liczby -1 i 1;
2. Znak współczynnika informuje o kierunku zależności (liniowa ujemna lub liniowa dodatnia);
3. Wartość bezwzględna $|r|$ informuje o sile korelacji liniowej;
4. W szczególnym przypadku, gdy $|r| = 1$ mamy do czynienia z dokładnie liniową zależnością.

Uwaga,Uwaga, ...

Wartość $r = 0$ nie świadczy o braku zależności między zmiennymi.

Jak oszukać współczynnik korelacji



Jak dziecko we mgle

Wartość współczynnika korelacji w tym przypadku wynosi $r = 0$

Pułapka - korelacje pozorne

Wyniki analizy korelacji liniowej dla 17 krajów europejskich (dane z 1990 roku) pomiędzy powierzchnią, liczbą mieszkańców, liczbą urodzeń a liczbą bocianów:

	powierzchnia	liczba bocianów	liczba mieszkańców	liczba urodzeń
powierzchnia	1	0.579	0.812	0.923
liczba bocianów	0.579	1	0.354	0.620
liczba mieszkańców	0.812	0.354	1	0.851
liczba urodzeń	0.923	0.620	0.851	1

Pułapka - korelacje pozorne

Wyniki analizy korelacji liniowej dla 17 krajów europejskich (dane z 1990 roku) pomiędzy powierzchnią, liczbą mieszkańców, liczbą urodzeń a liczbą bocianów:

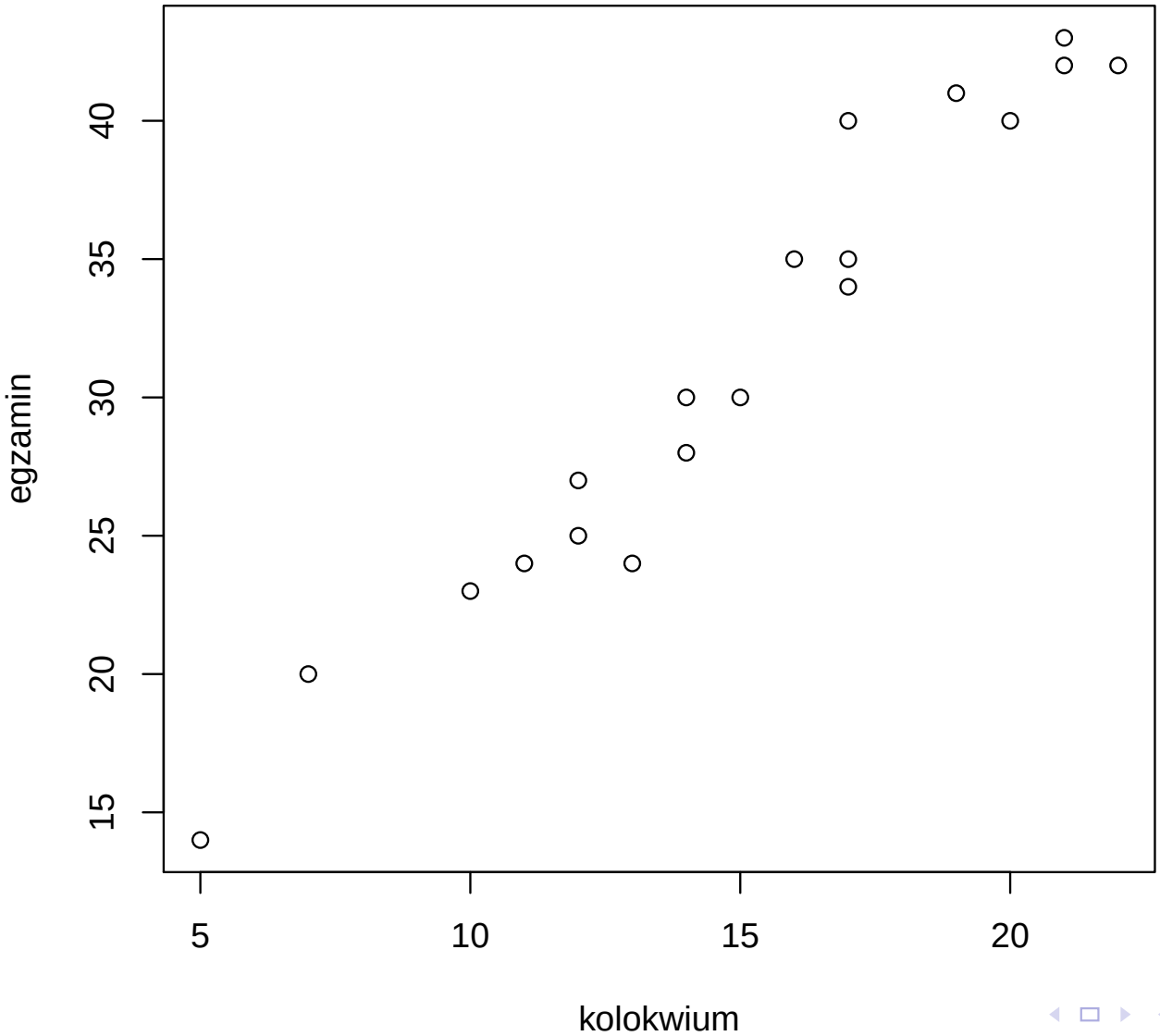
	powierzchnia	liczba bocianów	liczba mieszkańców	liczba urodzeń
powierzchnia	1	0.579	0.812	0.923
liczba bocianów	0.579	1	0.354	0.620
liczba mieszkańców	0.812	0.354	1	0.851
liczba urodzeń	0.923	0.620	0.851	1

I jak tu nie wierzyć w bociana.

Regresja liniowa

Poniżej na wykresie zostały umieszczone wyniki kolokwium zaliczeniowego i egzaminu z pewnego przedmiotu dla studentów studiujących matematykę. Zależność pomiędzy wynikiem z kolokwium a wynikiem z egzaminu można przedstawić graficznie **wykres rozproszenia**

Regresja liniowa - Wykres rozproszenia



Zauważmy, że w naszym przykładzie dużym (odpowiednio małym) wartościom wyniku kolokwium odpowiadają z reguły duże (małe) wartości egzaminu końcowego. Mówimy w takim przypadku o zależności dodatniej między zmiennymi, w odróżnieniu od zależności ujemnej, gdy duże wartości jednej zmiennej odpowiadają w większości przypadków małym wartościom drugiej zmiennej (zależnść ujemna).

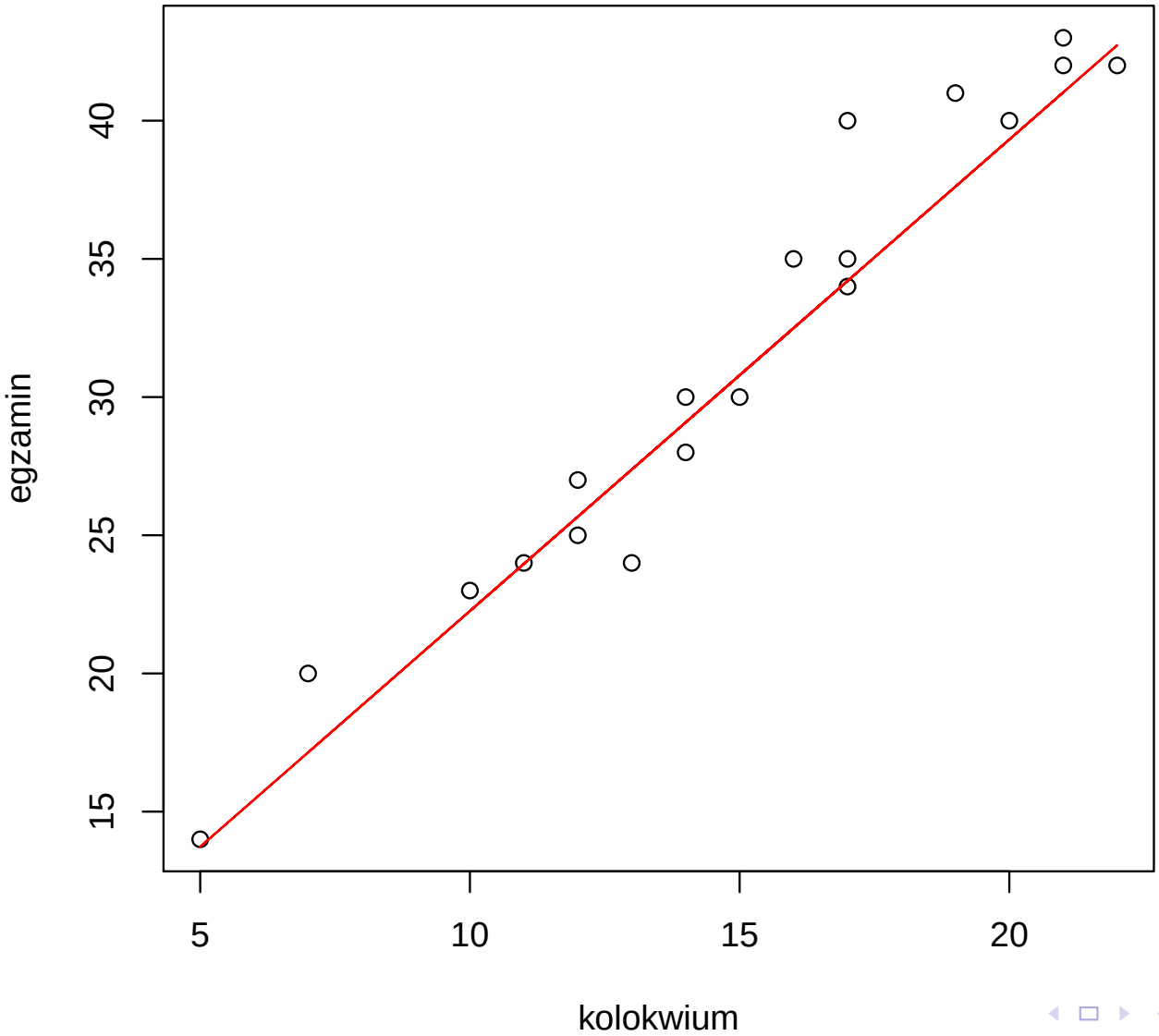
Regresja liniowa - terminologia

Zmienną Y będącą wynikiem doświadczenia będziemy nazywali **zmienną objaśnianą** w odróżnieniu od X **zmiennej objaśniającej** (za pomocą zmian X chcemy objaśnić zmiany zmiennej Y).

Regresja liniowa - zależność funkcyjna

Powstaje pytanie - Czy przedstawiona na tym wykresie chmurak punktów ma choćby w przybliżeniu zależność funkcyjną ? To znaczy czy punkty z wykresu układają się wzdłuż wykresu pewnej funkcji?

Regresja liniowa - zależność funkcyjna



Współczynnik korelacji

W naszym przypadku (kolokwia, egzamin) współczynnik korelacji wynosi 0.973430184460792 co świadczy o silnej dodatniej zależności pomiędzy tymi zmiennymi.

Regresja liniowa - prosta regresji

Zadanie

Wyznaczenie prostej reprezentującej w sposób adekwatny chmurę punktów z wykresy rozproszenia.

Zadanie

Wyznaczenie prostej reprezentującej w sposób adekwatny chmurę punktów z wykresy rozproszenia.

Rozwiązanie

Jeżeli przyjmiemy, że funkcja liniowa ma przybliżać chmurę punktów, to wartość:

$$y_i^* = ax_i + b$$

można interpretować jako wartość przewidywaną y_i na podstawie rozpatrywanej prostej. Błąd oszacowania wynosi wtedy $y_i^* - y_i$ (wartość resztowa rezyduum).

Regresja liniowa - metoda najmniejszych kwadratów

Niech

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2.$$

Definicja

Prostą regresji opartą na metodzie najmniejszych kwadratów nazywamy prostą $y = ax + b$, dla której wartość $S(a,b)$ jest minimalna.

Regresja liniowa - przydatne wzory

1. $b = \bar{y} - a\bar{x}$;

Pytanie

Jak te wzory uzyskano?

Regresja liniowa - przydatne wzory

1. $b = \bar{y} - a\bar{x}$;
2. $a = r\frac{S_{nX}}{S_{nY}}$.

Pytanie

Jak te wzory uzyskano?

Regresja liniowa - przydatne wzory

Całkowita suma kwadratów

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

Suma kwadratów błędów

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^*)^2$$

Regresyjna suma kwadratów

$$SSR = \sum_{i=1}^{n}(y_i^* - \bar{y})^2$$

Współczynnik determinacji

iloraz

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

nazywamy współczynnikiem determinacji.

Własności R^2

1. R^2 jest miarą stopnia dopasowania funkcji regresji do danych empirycznych;

Współczynnik determinacji

iloraz

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

nazywamy współczynnikiem determinacji.

Własności R^2

1. R^2 jest miarą stopnia dopasowania funkcji regresji do danych empirycznych;
2. W naszym przypadku $R^2 = r^2$.

Współczynniki prostej regresji

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Coefficients:
(Intercept)            x
      5.200        1.760
```

Bardziej szczegółowy wydruk

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.0855 -1.2261 -0.1272  0.7530  4.8728

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   5.1999     1.5660   3.321  0.00405 **
x             1.7604     0.1004  17.528 2.56e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘

Residual standard error: 2.018 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9476, Adjusted R-squared: 0.9445
F-statistic: 307.2 on 1 and 17 DF,  p-value: 2.555e-12
```