Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

4 kwietnia 2012

Dotychczas zajmowaliśmy się praktycznym zastosowaniem testów istotności nasze zadanie sprowadzało się do testowania hipotez o parametrach rozkładu. Teraz będziemy rozważać ogólniejsze zagadnienia

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;

Testy nieparametryczne

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;
- testowanie jednorodności n rozkładów w sytuacji, gdy obserwacje należą do k kategorii;

Testy nieparametryczne

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;
- testowanie jednorodności n rozkładów w sytuacji, gdy obserwacje należą do k kategorii;
- testowanie niezależności.

Przykłady

1. Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?

Przykłady

1. Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?
2. Zaobserowano 60 kolejnych niezależnych rzutów kostką. Czy na tej podstawie można stwierdzić (z pewnym prawdopodobieństwem błędu), że kostka nie jest symetryczna?

Przykłady

1. Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?
2. Zaobserowano 60 kolejnych niezależnych rzutów kostką. Czy na tej podstawie można stwierdzić (z pewnym prawdopodobieństwem błędu), że kostka nie jest symetryczna?
3. krzyżując homozygoty recesywne z heterozygotą otrzymano 234 osobników potomnych z czego 122 osobniki są homozygotyczne a 112 heterozygotyczne. Czy to powinno skłonić nas do odrzucenie teorii o równomiernym rozkładzie tych typów osobników ?

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

H_0 $p = p_0$;

H_1 $p \neq p_0$.

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

H_0 $p = p_0$;

H_1 $p \neq p_0$.

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

H_0 $p = p_0$;

H_1 $p \neq p_0$.

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Uwaga

Korzystamy z faktu, że ta statystyka testowa u przy prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie

Na 800 zbadanych pacjentów szpitala 320 miało grupę krwi „0”. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że proporcja pacjentów z tą grupą krwi wynosi 0.35.

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

H_0 $p_1 = p_2$;

H_1 $p_1 \neq p_2$.

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

H_0 $p_1 = p_2$;

H_1 $p_1 \neq p_2$.

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

przy czym $\bar{p} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$, oraz $n = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$.

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

H_0 $p_1 = p_2$;

H_1 $p_1 \neq p_2$.

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

przy czym $\bar{p} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$, oraz $n = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}$.

Uwaga

Korzystamy z faktu, że ta statystyka testowa u przy prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie

Przy kontroli pracy dwu central telefonicznych w pewnym dniu stwierdzono, że na 200 połączeń w centrali A 16 było pomyłkowych. Natomiast na 100 połączeeń w centrali B złych połączeń było 10. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że procent złych połączeń jest jednakowy w obu centralach telefonicznych.

Rzucano monetą (monetami) ...

Uwaga

W praktyce w sytacjach takich jak powyżej testy dla proporcji stosuje się rzadko, ponieważ równie dokładną odpowiedź można uzyskać stosując tak zwany **test chi - kwadrat**.

Rzucano monetą (monetami) ...

Uwaga

W praktyce w sytacjach takich jak powyżej testy dla proporcji stosuje się rzadko, ponieważ równie dokładną odpowiedź można uzyskać stosując tak zwany **test chi - kwadrat**.

Uwaga na boku

Test chi - kwadrat ma także przewagę nad testem dla proporcji, że nie wymaga prób większych niż 100 pomiarów i może być stosowany przy skalach nominalnych, które nie są dychotomiczne.

Test χ^2 zgodności wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie testowe:

H_0: próba pochodzi z rozkładu G;

Test χ^2 zgodności wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie testowe:

H_0: próba pochodzi z rozkładu G;

H_1: próba nie pochodzi z rozkładu G.

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęciej stosowanym testem zgodności jest test χ^2. Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;

Test χ^2 zgodności

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęciej stosowanym testem zgodności jest test χ^2. Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;
- n_i liczba jednostek posiadających k-tą kategorię;

Test χ^2 zgodności

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęciej stosowanym testem zgodności jest test χ^2. Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;
- n_i liczba jednostek posiadających k-tą kategorię;
- $\bar{n}_i$ liczebności hipotetyczne.

Uwaga

Przy prawdziwości H_0

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

ma rozkład χ^2 o liczbie stopni swobody $s = k - 1$.

- $k = 2$ (liczba kategorii);

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

- $k = 2$ (liczba kategorii);
- $n_1 = 320, n_2 = 480$ (liczba jednostek przypadających na k-tą kategorię);

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

- $k = 2$ (liczba kategorii);
- $n_1 = 320, n_2 = 480$ (liczba jednostek przypadających na k-tą kategorię);
- $\bar{n}_1 = 280, \bar{n}_2 = 520$ liczebności hipotetyczne.

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

Obliczenia

$$\chi^2 = \frac{(320-280)^2}{280} + \frac{(480-520)^2}{520} = 8.79120879120879$$

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

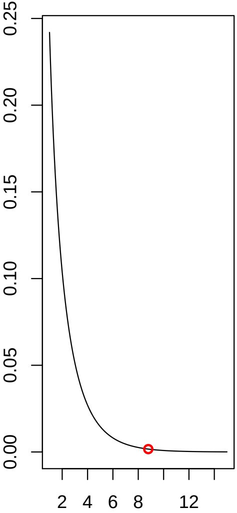
Obliczenia

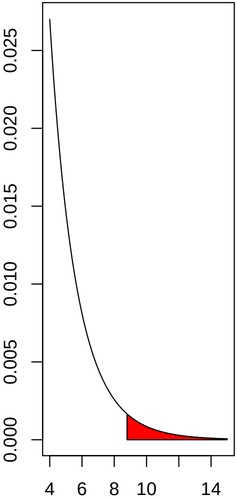
$$\chi^2 = \frac{(320 - 280)^2}{280} + \frac{(480 - 520)^2}{520} = 8.79120879120879$$

Obliczenia

P wartość wynosi 0.00302685618912935.

Jak to teraz zinterpretować?





A jak to wyglada w R?

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  grupa_krwi
X-squared = 8.7912, df = 1, p-value = 0.003027
```

Czy kostka jest uczciwa ?

Rzuciliśmy 200 razy kostką. Otrzymaliśmy wyniki:

```
 1  2  3  4  5  6
35 31 32 34 28 40
```

`wynik testu:`

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  rzut_kostka
X-squared = 2.5, df = 5, p-value = 0.7765
```

Grupę 234 osobników potomnych możemy traktować jako próbę z populacji, w której proporcja muszek o oczach czerwonych wynosi 50%.

.	Czerwone	Białe
Obserwowane	122	112
Spodziewane	117	117

Przygody muszek owocowych - wynik testu

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  muszka_owocowa
X-squared = 0.4274, df = 1, p-value = 0.5133
```

Przygody dziwaczka

Kojarząc heterozygoty dziwaczka o różowych kwiatach otrzymaliśmy w potomstwie następujące liczby osoników o kwiatach:

- czerwonych (C) 22
- różowych (R) 43
- białych (B) 17

Czy prawdziwe jest zatem twierdzenie, że w przypadku gdy homozygoty dominujące różnią się od heterozygot, to w drugim pokoleniu trzy genotypy powinny pojawić się w proporcji $1 : 2 : 1$.

Przygody dziwaczka

.	Czerwone	Różowe	Białe
Obserwowane	22	43	17
Spodziewane	20.5	41	20.5

Przygody dziwaczka - wynik testu

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  kwiatki
X-squared = 0.8049, df = 2, p-value = 0.6687
```

Dalsze zastosowanie testu chi - kwadrat

Za pomocą testu chi kwadrat można także porównywać ze sobą różne rozkłady empiryczne i w ten sposób badać związek między dwoma cechami nominalnymi.

.	Grunt	Roślinność zielna	Pnie drzew	Sum w
Młode	52	43	17	112
Stare	108	15	74	197
Sum kol	160	58	91	309

Czy młode ślimaki różnią się od dorosłych skłonnością do przebywania w różnych siedliskach?

Przygody ślimaków winniczków - tabela liczności oczekiwanych

.	Grunt	Roślinność zielna	Pnie drzew	Sum w
Młode	57.99	21.02	32.98	112
Stare	102.01	36.98	58.02	197
Sum kol	160	58	91	309

Jak otrzymać tę tabelę?

Tablica wielodzielcza

Obserwowane

	1	...	l	Sum
1	n_{11}	...	n_{1l}	$n_{1.}$
2	n_{21}	...	n_{2l}	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	n_{k1}	...	n_{kl}	$n_{k.}$
Sum	$n_{.1}$	...	$n_{.l}$	N

Oczekiwane

	1	...	l	Sum
1	$\frac{n_{1.}n_{.1}}{N}$	...	$\frac{n_{.l}n_{1.}}{N}$	$n_{1.}$
2	$\frac{n_{2.}n_{.1}}{N}$	...	$\frac{n_{.l}n_{2.}}{N}$	$n_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$\frac{n_{k.}n_{.1}}{N}$	...	$\frac{n_{.l}n_{k.}}{N}$	$n_{k.}$
Sum	$n_{.1}$	...	$n_{.l}$	N

Uwaga

Statystyka testowa przyjmie postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{N})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{N}}$$

Statystka ta ma rozkład χ^2 o $(k-1)(l-1)$ stopniach swobody.

ślimaki winniczki - wyniki

```
Pearson's Chi-squared test

data:  slimaki
X-squared = 49.1585, df = 2, p-value = 2.115e-11
```

Zadanie z centralami telefonicznymi początek wykładu

Obserwowane

	Poł	Awaria	Suma w
Centr A	184	16	200
Centr B	90	10	100
Suma kol	274	26	300

Tabela dwudzielcza

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	N

Uwaga

Statystyka testowa przyjmie postać:

$$\chi^2 = \frac{N|ad - cb|}{(a+c)(b+d)(c+d)(a+b)}$$

Statystka ta ma rozkład χ^2 o 1 stopniu swobody.

```
Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

data:  centrala_telefoniczna
X-squared = 0.1316, df = 1, p-value = 0.7168
```