Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł, Błażej

27 lutego 2013

Zasady

- 10 wykładów;
- egzamin pisemny;

Literatura

1. A. Łomnicki „Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników" PWN 1999.
2. W. Krysicki, J. Bartoś, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach" PWN 1997
3. J. Koronacki, J. Mielniczuk „Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych" WNT 2006

Doświadczenie losowe

Realizacja (rzeczywista bądź tylko myślowa) określonego zespołu warunków, wraz z góry określonym zbiorem wyników.

- Poszczególne wyniki ω doświadczenia losowego traktujemy jako **zdarzenia elementarne**.
- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** Ω.

Uwaga

W praktyce najczęściej interesujące są nie pojedyncze zdarzenia lecz podzbiory Ω. Każdy taki podzbiór nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Zbiór wszystkich zdarzeń losowych będziemy nazywać przestrzenią zdarzeń losowych i oznaczamy ją przez $\mathcal{F}$.

Określenie działań na zdarzeniach losowych w języku zbiorów

Na zdarzeniach losowych wykonujemy analogiczne działania jak na zbiorach.

1. zdarzenie niemożliwe interpretujemy jako zbiór pusty $\emptyset$;
2. sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A lub B;
3. przekrój zbiorów A i B oznaczamy przez $A \cap B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A i B;

Określenie działań na zdarzeniach losowych w języku zbiorów

1. różnicę zbiorów A i B oznaczamy przez $A \setminus B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A i nie należą do B;
2. dopełnienie zbioru A oznaczamy przez $A' = \Omega \setminus A$;
3. mówimy, że zdarzenie A pociąga zdarzenie B, co oznaczamy przez $A \subset B$, jeżeli każde zdarzenie elementarne $\omega \in A$ należy również do B $(\omega \in B)$;
4. mówimy, że zdarzenia A i B wykluczają się, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zadanie

Podać przykład doświadczenia losowego i opisać je za pomocą przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź

Rzut monetą

1. przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\mathbf{O}, \mathbf{R}\}$;
2. zdarzenia elementarne $\omega_1 = \mathbf{O}$, $\omega_2 = \mathbf{R}$;
3. zdarzenia losowe $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\mathbf{O}\},\ \{\mathbf{R}\},\ \{\mathbf{O},\ \mathbf{R}\}\}$

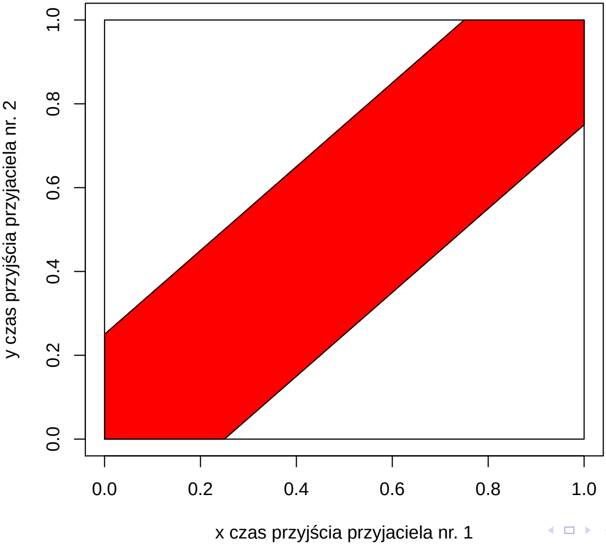
Interpretacja działań na zbiorach

Przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych często będziemy interpretowali jako prostokąt na płaszczyźnie, punkty tego prostokąta - wszystkie albo tylko zaznaczone - jako zdarzenia elementarne. Gdy wszystkie punkty prostokąta interpretujemy jako zdarzenia elementarne, wtedy zajście zdarzenia elementarnego możemy traktować jako rezultat losowo rzuconego punktu na ten prostokąt.

Zadanie

Dwoje przyjaciół umówiło się na spotkanie w restauracji pomiędzy godziną 18 a 19 zastrzegając jednocześnie, że pierwszy przychodzący czeka na drugiego tylko 15 minut. Opisz graficznie przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zaznacz zdarzenia sprzyjające.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych interpretacja graficzna



Definicja prawdopodobieństwa

Przestrzeń probabilistyczna

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń (podzbiorów zbioru Ω), P to funkcja określająca prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń ze zbioru $\mathcal{F}$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

1. przestrzeń Ω sklada się z n zdarzeń elementarnych;
2. zdarzenia jednoelementowe $\{\omega\}$ są jednakowo prawdopodobne, a więc

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n};$$

3. prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych wyraża się równością

$$P(A) = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni } \Omega}$$

Przykład

Rzut kostką $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, gdzie ω_i, dla $i = 1, 2, \ldots, 6$ oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu i oczek.Przy założeniu, że kostka jest symetryczna wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Niech $A \subset \Omega$. Wówczas

$$P(A) = \frac{\#\{w_i \in A\}}{\#\{w_i \in \Omega\}}$$

Elementarne pojęcia z kombinatoryki

Reguła iloczynu

W rozwiązywaniu zagadnień kombinatorycznych wielokrotnie stosuje się **regułę iloczynu**: jeżeli pewną czynność wykonuje się w k-etapach, przy czym etap 1 można wykonać n_1 sposobami, etap 2 n_2 sposobami, . . . , wreszcie k-ty etap n_k sposobami, to liczba N sposobów jakimi można wykonać tę czynność wyraża się wzorem:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Permutacje bez powtórzeń

Niech A oznacza dowolny zbiór n różnych elementów $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. **Permutacją bez powtórzeń** zbioru n-elementowego A nazywamy każdy n wyrazowy ciąg elementów zbioru A, w którym każdy element zbioru A pojawia się tylko jeden raz.

Ilość permutacji n-wyrazowych zbioru n-elementowego wynosi

$$P_n = n!.$$

Zadanie

1. na ile sposobów można ustawić n osób w szeregu?
2. na ile sposobów można ustawić n osób przy okrągłym stole?

Permutacje z powtórzeniami

Niech A oznacza zbiór k różnych elementów $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. **Permutacją** n**-elementową z powtórzeniami**, w której każdy element a_i powtarza się n_1- razy,$\ldots$, element a_k powtarza się n_k razy, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, nazywamy każdy n- wyrazowy ciąg, w którym poszczególne elementy zbioru A powtarzają się wskazaną liczbę razy.
Liczba $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ wszystkich takich n - wyrazowych permutacji z powtórzeniami wyraża się równością

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Zadanie

Dziecko bawi się następującymi klockami $m, a, t, e, m, a, t.y, k, a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo je układając ułoży ono słowo **matematyka**?

Wariacje bez powtórzeń

Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k- wyrazowy ($k \leqslant n$) ciąg różnych elementów tego zbioru nazywamy k - **wyrazową wariacją bez powtórzeń z** n **- elementowego zbioru** A.

$$V_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Wariacje z powtórzeniami

Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k- wyrazowy ($k < n$) ciąg mogących sią powtarzać elementów tego zbioru nazywamy k - **wyrazową wariacją z powtórzeniami z** n - **elementowego zbioru** A.

$$W_n^k = n^k.$$

Zadanie

Z n elementowego zbioru A losujemy ze zwracaniem k elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy są różne.

Kombinacje bez powtórzeń

Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k- wyrazowy ($k < n$) ciąg różnych elementów tego zbioru nazywamy **k - wyrazową kombinacją bez powtórzeń z n - elementowego zbioru A.**

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Zadania pokerowe

Losujemy 5 kart z 52. Oblicz prawdopodobieństwa wylosowania następujących układów kart

- pary
- trójki
- karety
- koloru

Definicja prawdopodobieństwa

Własności funkcji prawdopodobieństwa P

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. jeżeli $A_1, \ldots, A_n$ jest dowolnym ciągiem parami rozłącznych zadarzeń ze zbioru $\mathcal{F}$, to

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Warunki powyższe nazywamy aksjomatami prawdopodobieństwa sformułował je w 1931 r. A.N. Kołmogorow.

Elementarne własności prawdopodobieństwa

1. prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równa się zero: $P(\emptyset) = 0$;
2. jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B $(A \subset B)$, to $P(A) \leqslant P(B)$;
3. prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest nie większe niż jeden $(P(A) \leqslant 1)$, A dowolne;
4. jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B $(A \subset B)$, to $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Załóżmy, że w tym eksperymencie jedyne wyniki jakie możemy obserwować są liczbami parzystymi. Jakie jest zatem prawdopodobieństwo tego, że wyrzucona liczba oczek będzie równa 2?

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, B dowolnym ustalonym zbiorem o dodatnim prawdopodobieństwie, $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem warunkowym** pod warunkiem B dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ nazywamy liczbę $P(A|B)$ określoną przez następującą równość:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0.$$

Własności prawdopodobieństwa warunkowego

Prawdopodobieństwo przekroju zbiorów $A_1, A_2 \ldots, A_n$ wyraża się wzorem:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli B jest dowolnym zdarzeniem, natomiast zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają warunki:

1. wykluczają się parami, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ gdy $i \neq j$;
2. ich suma jest zdarzeniem pewnym, czyli
$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega;$$
3. mają dodatnie prawdopodobieństwa;

to prawdopodobieństwo zdarzenia B wyraża się równością

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Zadanie

Pewna choroba występuje w społeczeństwie z prawdopodobieństwem 0.001. Do wykrycia choroby sporządzono test T, który stwierdza chorobę z prawdobodobieństwem 0.99 u osób chorych i 0.05 u osób zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że test da wynik pozytywny (”powie chory”) dla losowo wybranej osoby?

Rozwiązanie

1. $T = 1$ test ''mówi chory'';
2. $Z = 1$ osoba chora;
3. $Z = 0$ osoba zdrowa.

$$P(T = 1) = P(T = 1|Z = 1)P(Z = 1) + P(T = 1|Z = 0)P(Z = 0)$$

Można też poprzednie zadanie sformułować inczaczej: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dla osoby rzeczywiście chorej test ”powiedział jest zdrowy”?

Rozwiązanie

$$P(Z=1|T=0) = \frac{P(T=0|Z=1)P(Z=1)}{P(T=0|Z=1)P(Z=1) + P(T=0|Z=0)P(Z=0)}$$

Twierdzenie Bayesa

Jeżeli B jest dowolnym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie, $P(B) > 0$, zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają warunki wymienione w twierdzeniu o prawdopodobieństwie całkowitym, to prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_k|B)$, $k = 1, \ldots, n$ wyraża się wzorem

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Niezależność zdarzeń

Mówimy, że zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są **niezależne**, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$