Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

18 kwietnia 2013

Problemy człowieka za szafą

Człowiek za szafą rzuca razy monetą. Może on rzucać :

1. monetą symetryczną;
2. monetą, która ma orła z dwu stron.

Zadania

1. Wymyśl procedurę pozwalająca stwierdzić jaka to moneta;
2. Opisz własnymi słowami problemy jakie mogą się pojawić.

Człowiek za szafą rzuca 10 razy monetą. Może on rzucać :

1. monetą symetryczną;
2. monetą, dla której $p = \frac{1}{3}$

Zadania

1. Wymyśl procedurę pozwalającą stwierdzić jaka to moneta;
2. Opisz własnymi słowami problemy jakie mogą się pojawić.

Propozycja procedury testującej

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \ (p = 1/3) & \text{gdy } x = 0, 1, 2, 3, 4; \\ 0, \ (p = 1/2) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

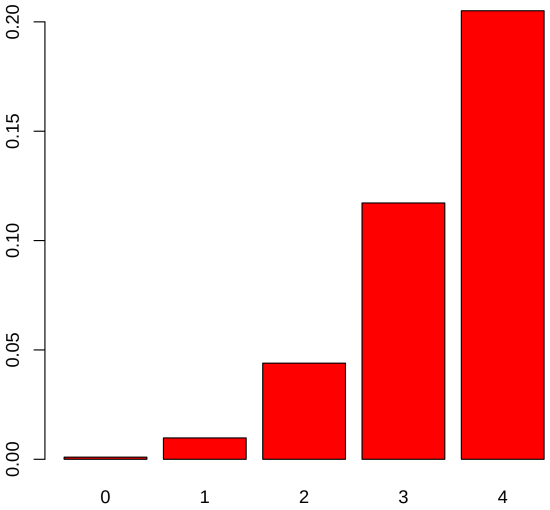
Opisz jakie popełniamy błędy stosując taką procedurę.

Jaką monetą rzuca człowiek za szafą? -ciąg dalszy problemów

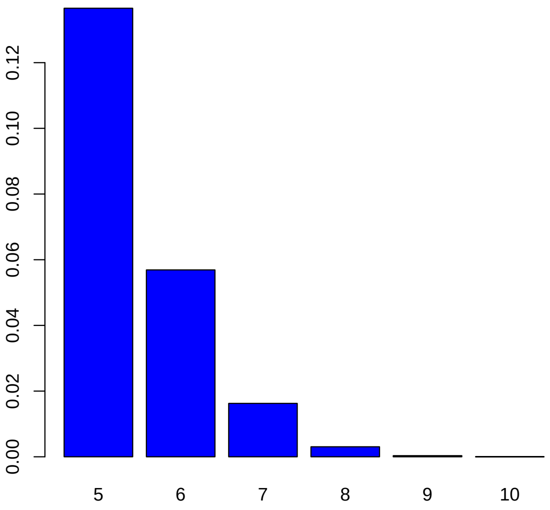
W trakcie wykonywania powyższej procedury pojawią się następujące problemy:

1. $\phi = 1$ chociaż człowiek za szafą rzuca monetą symetryczną (błąd I rodzaju);
2. $\phi = 0$ chociaż człowiek za szafą rzuca monetą $p = \frac{1}{3}$ (błąd II rodzaju);

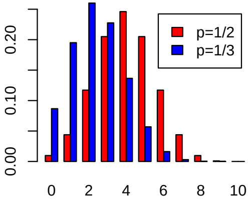
Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju

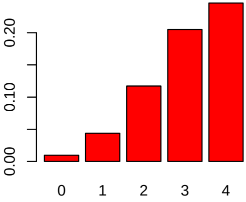


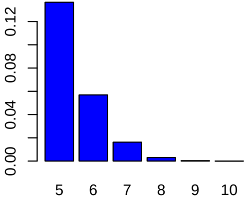
Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju



Podsumowanie







1. Oblicz prawdopodobieństwo błędu I rodzaju dla takiej procedury.

Jaką monetą rzuca człowiek za szafą?

1. Oblicz prawdopodobieństwo błędu I rodzaju dla takiej procedury.
2. Oblicz prawdopodobieństwo błędu II rodzaju dla takiej procedury.

Komentarze

Uwaga

Przy tak skonstruowanej procedurze (teście) ϕ rzuca się w oczy bardzo duży błąd II rodzaju. Jak temu zaradzić?

Komentarze

Uwaga

Przy tak skonstruowanej procedurze (teście) ϕ rzuca się w oczy bardzo duży błąd II rodzaju. Jak temu zaradzić?

Uwaga

Jedną z możliwości jest zmiana sposobu orzekania tzn. koncentrujemy się tylko na minimalizacji błędu I rodzaju.

Jak to działa?

przypadek 1

Jeżeli $\phi(x) = 1$, to odrzucamy zdanie $p = 1/2$ (prawdziwe jest $p = 1/3$).

Jak to działa?

przypadek 1

Jeżeli $\phi(x) = 1$, to odrzucamy zdanie $p = 1/2$
(prawdziwe jest $p = 1/3$).

przypadek 2

Jeżeli $\phi(x) = 0$, to mówimy
„Nie ma podstaw do stwierdzenia, że $p = 1/3$".

Przykład – studenci i ich punkty z kolokwium

Pytanie

Czy średnia ilość punktów zdobytych przez studentów *I* roku jest równa 6?

Suma punktów 10 wybranych studentów to odpowiednio:

$$5, 10, 6, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 5.$$

Średnia z tych liczb wynosi 7.1. Jak zatem odpowiedzieć na tak postawione pytanie?

Jak w takim przykładzie wymyślić procedurę testującą

Założenia

1. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots X_{10} \sim \mathcal{N}(\mu, 2)$, to $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 2/\sqrt{10})$;

Jak w takim przykładzie wymyślić procedurę testującą

Założenia

1. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots X_{10} \sim \mathcal{N}(\mu, 2)$, to $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 2/\sqrt{10})$;
2. $\sqrt{10}(\frac{\bar{X}-\mu}{2}) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Test studenci - punkty

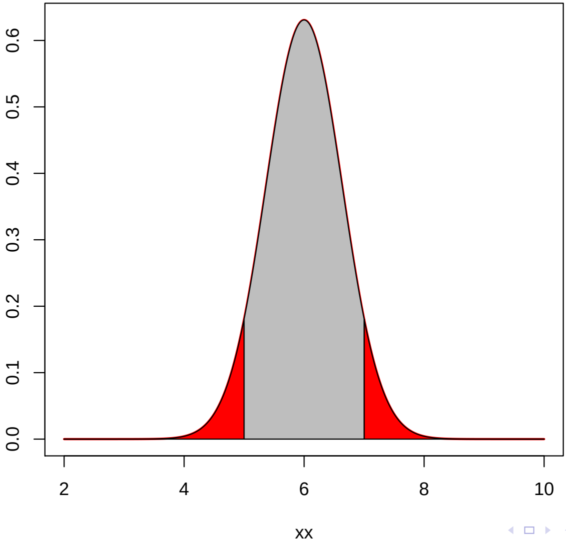
W naszym przykładzie dotyczącym studentów i ich ocen za statystykę testową przyjmijmy średnią z próby.

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

Za test statystyczny możemy przyjąć następującą regułę:

1. przyjmij, że $\mu = 6$ gdy $5 \leqslant T(X) \leqslant 7$,
2. odrzuć, że $\mu = 6$ gdy $T(X) < 5$ lub $T(X) > 7$.

Test studenci - punkty - rysunek



To samo tylko trochę bardziej formalnie

1. Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;

To samo tylko trochę bardziej formalnie

1. Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;
2. Zakładamy, że rozkłady obserwowanych zmiennych losowych dadzą się opisać przez zbiór parametrów Θ;

To samo tylko trochę bardziej formalnie

1. Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;
2. Zakładamy, że rozkłady obserwowanych zmiennych losowych dadzą się opisać przez zbiór parametrów Θ;
3. Formułujemy pytanie (hipotezę) np. obserwowana próba pochodzi z rozkładu o parametrze $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$.

Hipotezy

Z zasady formułujemy dwa pytania:

- *hipotezę zerową* H_0;
- *hipotezę alternatywną* H_1;

w taki sposób aby wzajemnie się wykluczały.

Hipotezy

Przykład z monetami

1. $H_0: \; p = 1/2$
2. $H_1: \; p = 1/3$

Hipotezy

Przykład z monetami

1. $H_0: \; p = 1/2$
2. $H_1: \; p = 1/3$

Przykład z punktami

1. $H_0: \; \mu = 6;$
2. $H_1: \; \mu \neq 6$

Test statystyczny

Testem statystycznym nazywamy regułę, która określa, dla jakich wyników eksperymentu $x \in X$ należy podjąć decyzję o

- przyjęciu H_0;
- odrzuceniu H_0 i przyjęciu H_1.

Obszar krytyczny testu

Test statystyczny dzieli przestrzeń możliwych obserwacji $\mathcal{X}$ na dwa rozłączne podzbiory:

1. obszar odrzucenia hipotezy zerowej (obszar krytyczny) $B \subset X$;
2. obszar przyjęcia hipotezy zerowej B^c .

Obszar krytyczny testu

Przykład z monetami

1. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2. $B^c = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Obszar krytyczny testu

Przykład z punktami

1. $B = (-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$
2. $B^c =< 5, 7 >$

Testowanie hipotez statystycznych przypadek ogólny

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:
H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.
Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

1. H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:
H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.
Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

1. H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;
2. H_1 : parametr **jest większy** od założonej liczby;

Testowanie hipotez statystycznych przypadek ogólny

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:
H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.
Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

1. H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;
2. H_1 : parametr **jest większy** od założonej liczby;
3. H_1 : parametr **jest mniejszy** od założonej liczby.

Testowanie hipotez statystycznych przypadek ogólny

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : próba losowa **pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : próba losowa **pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Hipotezę alternatywną zapisujemy w następujący sposób

H_1 : próba losowa **nie pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Możliwe sytuacje decyzyjne w badaniu hipotez statystycznych

Hipoteza H_0	H_0 prawdziwa	H_0 fałszywa
odrzucić H_0	błąd I rodzaju	decyzja poprawna
przyjąć H_0	decyzja poprawna	błąd II rodzaju

Uwaga

Podstawowym problemem testowania hipotez jest to, że decyzje podejmowane przez statystyka są obarczone błędem (I i II rodzaju). Dodatkowym zadaniem staje się zatem kontrola błędów wynikających z podejmowanych decyzji.

poziom istotnosci

Kluczowym zagadnieniem w problemie testowania hipotez jest prawdopodobieństwo błędu I rodzaju (**powinno być ona jak najmniejsze**). Pawdopodobieństwo błędu I rodzaju oznaczane jest przez α **poziom istotności**.

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach skoncentrujemy sie na kontroli błędu I rodzaju. Tym samym najważniejszym problemem jest poprawne sformułowanie hipotezy zerowej (odrzucanej).

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach skoncentrujemy sie na kontroli błędu I rodzaju. Tym samym najważniejszym problemem jest poprawne sformułowanie hipotezy zerowej (odrzucanej).

Uwaga

W przypadku gdy test nie będzie w stanie odrzucić hipotezy zerowej będziemy mówić „nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy”.

Problemy z formułowaniem hipotezy zerowej i alternatywnej

Pewna firma farmaceutyczna chce sprawdzić czy nowy lek nie ma skutków ubocznych. Sprawdzenie zostanie wykonane za pomocą testu statystycznego. Zakładamy, że naszym celem jest kontrola błędu I rodzaju. Które z poniższych zagadnień testowych jest poprawnie sformułowane (z punktu widzenia tej firmy):

1. - H_0 : lek nie ma skutków ubocznych;
   - H_1 : lek ma skutki uboczne;

Problemy z formułowaniem hipotezy zerowej i alternatywnej

Pewna firma farmaceutyczna chce sprawdzić czy nowy lek nie ma skutków ubocznych. Sprawdzenie zostanie wykonane za pomocą testu statystycznego. Zakładamy, że naszym celem jest kontrola błędu I rodzaju. Które z poniższych zagadnień testowych jest poprawnie sformułowane (z punktu widzenia tej firmy):

1. - H_0 : lek nie ma skutków ubocznych;
   - H_1 : lek ma skutki uboczne;
2. - H_0 : lek ma skutki uboczne;
   - H_1 : nie ma skutków ubocznych;

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ przy czym parametr σ **jest znany**. Celem naszych badań jest stwierdzenie czy:

1. parametr $\mu > \mu_0$;
2. parametr $\mu < \mu_0$;
3. parametr $\mu \neq \mu_0$.

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

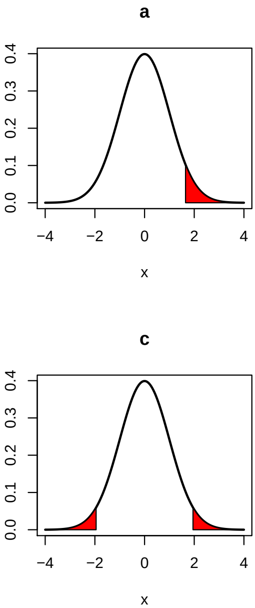
$$H_0: \ \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu > \mu_0$, .

(b) $\mu < \mu_0$,

(c) $\mu \neq \mu_0$


a
b
c
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4
x

Konstrukcja statystyki testowej Model 1.

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jak to działa?

Jeżeli $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}$ to hipotezę H_0 odrzucamy. W przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Uwaga

$u_{1-\alpha}$ jest to oczywiście kwantyl rzędu $1-\alpha$ z rozkładu $N(0,1)$.

Zadanie

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0, 1)$ testujemy hipotezę:

- $H_0 : \ \mu = \mu_0$;
- $H_1 : \ \mu > \mu_0$.

1. Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$

Zadanie

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0,1)$ testujemy hipotezę:

- $H_0: \ \mu = \mu_0$;
- $H_1: \ \mu > \mu_0$.

1. Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$
2. Powtórzmy to doświadczenie $n = 200$ razy ilu należy się spodziewać błędnych odrzuceń?

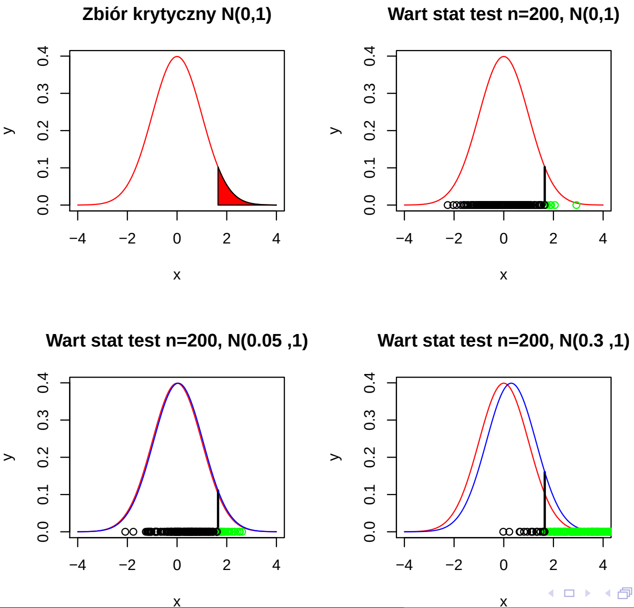
Zadanie

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0,1)$ testujemy hipotezę:

- $H_0: \ \mu = \mu_0$;
- $H_1: \ \mu > \mu_0$.

1. Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$
2. Powtórzmy to doświadczenie $n = 200$ razy ilu należy się spodziewać błędnych odrzuceń?
3. Wykonaj ten eksperyment w sytuacji gdy 100 elementowa próba pochodzi z rozkładów $N(0.05, 1)$, $N(0.3, 1)$.

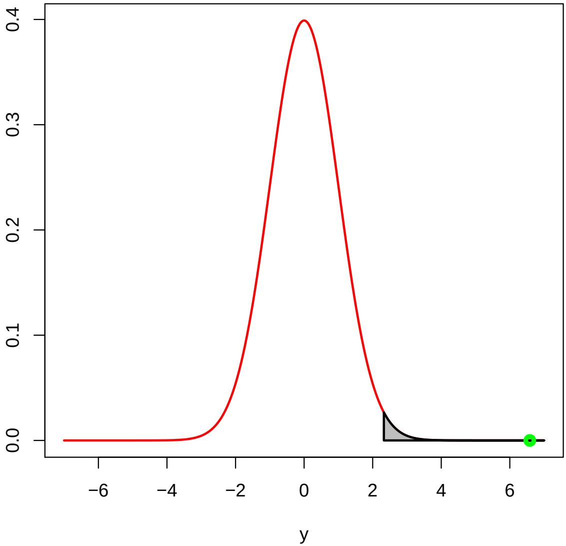
Zadanie



Zbiór krytyczny N(0,1)
Wart stat test n=200, N(0,1)
Wart stat test n=200, N(0.05 ,1)
Wart stat test n=200, N(0.3 ,1)
y
x
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

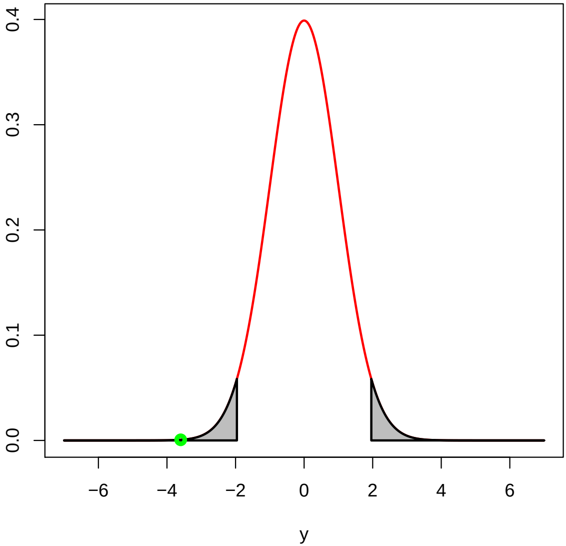
Zadanie

Norma techniczna przewiduje średnio 55 sek na wykonanie pewnej operacji technicznej. Ponieważ robotnicy skarżyli się, że norma jest zła dokonano pomiarów chronometrażowych dla $n = 60$ wylosowanych robotników i otrzymano z tej próby średnią $\bar{x} = 72$ sek oraz $S_n = 20$ sek. Czy można na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ odrzucić hipotezę, że rzeczywisty średni czas operacji jest zgodny z normą?


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6
y

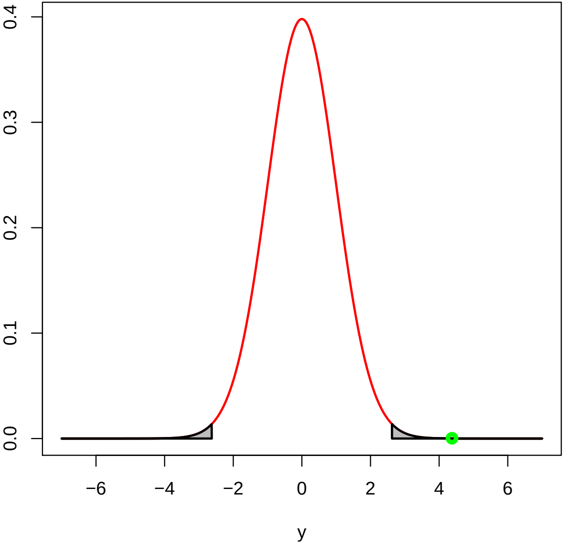
Zadanie

Zbadano w 81 wylosowanych zakładach koszty materiałowe i otrzymano średnią $\bar{x} = 540$ oraz $S_n = 150$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie koszty materiałowe przy produkcji tego wyrobu wynoszą 600.


0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−6
−4
−2
0
2
4
6
y

Zadanie

Badając w 1966 r. w pewnym dużym zakładzie przemysłowym absencję pracujących tam kobiet stwierdzono, że w wylosowanej próbie 100 pracownic tego zakładu średni czas przebywania ich na zwolnieniach lekarskich wyniósł $\bar{x} = 38$ dni, odchylenie standardowe $s_n = 16$ dni. Czy można na tej podstawie stwierdzić, że średni roczny czas zwolnień lekarskich dla pracownic tego zakładu jest dłuższy niż miesiąc, tj. 31 dni? Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0.01$.


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−6
−4
−2
0
2
4
6
y

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ przy czym parametr σ **jest nieznany**. Celem naszych badań jest stwierdzenie czy:

1. parametr $\mu > \mu_0$;
2. parametr $\mu < \mu_0$;
3. parametr $\mu \neq \mu_0$.

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0: \ \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu > \mu_0$, .

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0: \ \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu > \mu_0$, .

(b) $\mu < \mu_0$,

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0 : \ \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu > \mu_0$, .

(b) $\mu < \mu_0$,

(c) $\mu \neq \mu_0$

Konstrukcja statystyki testowej przypadek a

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jak to działa

Jeżeli $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}$ to hipotezę H_0 odrzucamy w przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Uwaga

$t_{1-\alpha}$ jest to oczywiście kwantyl rzędu $1-\alpha$ z rozkładu studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Zadanie

Producent zapewnia, że żywotność pewnego rodzaju baterii wynosi ponad 500 h. W losowej próbie 28 baterii otrzymano średnią 510 h z wariancją 900 h. Czy zapewnienia producenta są zasadne na poziomie istotności $\alpha = 0.01$?

Zadanie

W pewnym doświadczeniu biochemicznym bada się czas życia pewnych komórek w pewnym środowisku. Rozkład tego czasu można przyjąć z normalny. Dokonano 8 pomiarów i otrzymano następujące czasy życia tych komórek w tym środowisku $5.3, 4.0, 3.8, 6.2, 5.5, 4.5, 6.0, 4.7$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$ sprawdzić hipotezę że średni czas życia komórek w tym środowisku wynosi 4.0 godziny.

Rozwiązanie

```
One Sample t-test

data:  z
t = 3.1736, df = 7, p-value = 0.01563
alternative hypothesis: true mean is not equal to 4
95 percent confidence interval:
 4.254916 5.745084
sample estimates:
mean of x
        5
```

Zadanie

Wylosowano niezależnie 10 indywidualnych gospodarstw rolnych w pewnej wsi i otrzymano dla nich następujące wielkości uzyskanych plonów owsa (w q/ha):
$18.1, 17.0, 17.5, 17.8, 18.3, 16.7, 18.0, 15.9, 17.6, 18.1$ Na poziomie istotności $\alpha = 0.10$ zweryfikować hipotezę, że średni plon owsa w tej wsi wynosi $18q/ha$.

Rozwiązanie

```
One Sample t-test

data:  z
t = 56.3807, df = 9, p-value = 8.743e-13
alternative hypothesis: true mean is not equal to 4
95 percent confidence interval:
 16.95834 18.04166
sample estimates:
mean of x
     17.5
```

Problem

Co zrobić gdy chcemy przetestować hipotezę o średniej z próby $X_1, \ldots, X_k$ w sytuacji gdy próba ta nie pochodzi z rozkładu normalnego?

Odpowiedź

1. W przypadku dużej liczności próby użyć statystyki $\frac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n}}$ i użyć CTG (test z);

Problem

Co zrobić gdy chcemy przetestować hipotezę o średniej z próby $X_1, \ldots, X_k$ w sytuacji gdy próba ta nie pochodzi z rozkładu normalnego?

Odpowiedź

1. W przypadku dużej liczności próby użyć statystyki $\frac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n}}$ i użyć CTG (test z);
2. W przypadku małej liczności próby przyjąć (o ile to możliwe) założenie, że próba pochodzi z innego opisanego rozkładu i skonstruować test.

Obserwujemy następującą grupę danych

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots (X_{n-1}, Y_{n-1}), (X_n, Y_n)$$

.

Przy czym $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ oraz $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$
Niech $D_i = Y_i - X_i$. Testujemy następującą hipotezę zerową

$$H_0 : \mu_D = 0;$$

Porównanie dwóch prób, test dla prób sparowanych

Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\frac{\bar{d}}{S_{n-1}}\sqrt{n}.$$

Zadanie

W teście badającym pamięć uczniów dla 8 wylosowanych uczniów otrzymano następujące rezultaty (liczby zapamiętanych elementów): $16, 13, 14, 21, 19, 18, 26, 17$. Natomiast po specjalnym treningu pamięci grupa ta wykazała następujące wyniki: $21, 17, 20, 26, 23, 22, 21, 18$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że trening zwiększa liczbę zapamiętanych przez uczniów elementów.

Rozwiązanie

```
Paired t-test

data:  y and x
t = 2.3932, df = 7, p-value = 0.02397
alternative hypothesis: true difference in means is greater
95 percent confidence interval:
 0.62502      Inf
sample estimates:
mean of the differences
                      3
```

Zadanie

Zmierzono czaas reakcji na bodziec 8 kierowców przed i w 15 minut po wypiciu $100g$ wódki. Wyniki przed wypiciem wódki były następujące (w sekundach) :
$0.22, 0.18, 0.16, 0.19, 0.20, 0.23, 0.17, 0.25$ a po wypiciu wódki: $0.28, 0.25, 0.20, 0.30, 0.9, 0.26, 0.28.0.24$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wódka zwiększa czas reakcji na bodziec.

```
Paired t-test

data:  y and x
t = 1.704, df = 7, p-value = 0.9339
alternative hypothesis: true difference in means is less th
95 percent confidence interval:
      -Inf 0.2930173
sample estimates:
mean of the differences
                0.13875
```

Załóżmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oraz Y_1, $Y_2, \ldots Y_k$ o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \ \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

Porównanie dwóch prób, weryfikacja hipotezy o średnich

Załóżmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$ o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \ \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu_X > \mu_Y$, .

(b) $\mu_X < \mu_Y$,

Załóżmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oraz Y_1, $Y_2, \ldots Y_k$ o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \ \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu_X > \mu_Y$, .

(b) $\mu_X < \mu_Y$,

(c) $\mu_X \neq \mu_Y$

Skoncentrujmy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

1. parametry σ_X i σ_Y są **znane**;

Skoncentrujmy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

1. parametry σ_X i σ_Y są **znane**;
2. parametry σ_X i σ_Y są **nieznane** ale **równe**;

Skoncentrujmy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

1. parametry σ_X i σ_Y są **znane**;
2. parametry σ_X i σ_Y są **nieznane** ale **równe**;
3. parametry σ_X i σ_Y są **nieznane i nierówne**.

W sytuacji 1 statystyka testowa przyjmie postać

W sytuacji 1 statystyka testowa przyjmie postać

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{k}}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 2 statystyka testowa przyjmie postać:

W sytuacji 2 statystyka testowa przyjmie postać:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{nS_X^2+kS_Y^2}{n+k-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{k}\right)}} > t_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 3 statystyka testowa przyjmie postać (zakładamy dużą liczność próby)

Porównanie dwóch prób, weryfikacja hipotezy o średnich

W sytuacji 3 statystyka testowa przyjmie postać (zakładamy dużą liczność próby)

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S^2_{n_X - 1}}{n} + \frac{S^2_{n_Y - 1}}{k}}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 3 i przy małej liczebności próby stosujemy test Cochrana-Coxa. Statystyka testowa przyjmuje wtedy postać

W sytuacji 3 i przy małej liczebności próby stosujemy test Cochrana-Coxa. Statystyka testowa przyjmuje wtedy postać

$$C = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S^2_{n_1-1}}{n_1-1} + \frac{S^2_{n_2-1}}{n_2-1}}}$$

Test Cochrana-Coxa

Rozkład zmiennej losowej C zależy od liczności prób oraz od stosunku σ_1/σ_2, który jest nieznany, jednakże dla n_1 i n_2 można policzyć przybliżoną wartość krytyczną testu $C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$

$$C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) = \frac{\frac{S^2_{n_1-1}}{n_1-1} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1) + \frac{S^2_{n_2-1}}{n_2-1} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1)}{\frac{S^2_{n_1-1}}{n_1-1} + \frac{S^2_{n_2-1}}{n_2-1}}$$

Test Cochrana-Coxa

Sposób postępowania

Jeżeli $|C| > C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$, to odrzucamy hipotezę H_0 na poziomie istotności α.

UWAGA,UWAGA,UWAGA

UWAGA

W sytuacji małych prób zastosowanie testu studenta bądź testu Cochrana-Coxa powinno być uzależnione od wyniku testu F.

Test F

Załóżmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oraz Y_1, $Y_2, \ldots Y_k$ o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$.

Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \ \sigma_X = \sigma_Y.$$

Załóżmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$ o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$.

Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0: \ \sigma_X = \sigma_Y.$$

Przy hipotezie alternatywnej:

$$H_1: \ \sigma_X \neq \sigma_Y.$$

Test F

Statystyka testowa przyjmuje postać

$$F = \frac{S^2_{n_X - 1}}{S^2_{n_Y - 1}}.$$

W przypadku gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa statystyka F ma rozkład Snedecora o $(n_X - 1, n_Y - 1)$ stopniach swobody.

Zadanie

Pojemność życiowa płuc studentów uprawiających czynnie sport ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym $440cm^3$, natomiast dla studentów nie uprawiających sportu ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym $620cm^3$. Wylosowano z obu populacji studentów dwie próby: dla studentów uprawiających sport próbę o liczności $n = 20$ i średniej $\bar{x} = 4080cm^3$, a dla studntów nie uprawiających sportu próbę liczności $n = 15$ i średniej $\bar{x} = 3610cm^3$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.01$ sprawdzić hipotezę, że uprawianie przez studentów sportu zwiększa pojemność życiową płuc.

Zadanie

Pobrano dwie losowe próby ziaren fasoli i zmierzono długość ziaren. W przypadku A otrzymano $n = 450$, $\bar{x} = 12.3mm$, $S_{nA} = 1.8mm$. Natomiast dla gatunku B otrzymano $n = 500$, $\bar{x} = 11.9mm$, $S_{n_B} = 2.1mm$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie długości ziaren obu gatunków są takie same.

Zadanie

W celu stwierdzenia czy podanie pewnego preparatu farmaceutycznego zmienia frakcję pewnego białkaw moczu królików, dokonano pomiarów frakcji tego białka w grupie kontrolnej K, oraz pomiarów w grupie królików Z, którym podano preparat farmaceutyczny. Wyniki były następujące w (%)

Zadanie

W celu stwierdzenia czy podanie pewnego preparatu farmaceutycznego zmienia frakcję pewnego białkaw moczu królików, dokonano pomiarów frakcji tego białka w grupie kontrolnej K, oraz pomiarów w grupie królików Z, którym podano preparat farmaceutyczny. Wyniki były następujące w (%)

```
[1] 18.70  7.40  0.80 34.50 45.50 10.01 19.50 40.20 11.50
```

```
[1] 27.4 13.9 10.3  9.6  5.7  3.0 19.1  4.8 12.2
```

Sprawdzić założenie o równości wariancji dla tych dwóch prób, następnie wykonać test t dla dwóch prób (poziom istotności $\alpha = 0.05$).

Rozwiązanie

```
F test to compare two variances

data:  K and Z
F = 4.1585, num df = 8, denom df = 8, p-value = 0.05988
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equa
95 percent confidence interval:
  0.9380206 18.4356634
sample estimates:
ratio of variances
          4.158489
```

Rozwiązanie

```
Welch Two Sample t-test

data:  K and Z
t = 1.5689, df = 11.637, p-value = 0.1434
alternative hypothesis: true difference in means is not equ
95 percent confidence interval:
 -3.590286 21.836953
sample estimates:
mean of x mean of y
 20.90111  11.77778
```

Zadanie

Zmierzono w dwóch ulach średnicę komórek plastra zbudowanego przez pszczoły. Dla 7 wylosowanych komórek z pierwszego ula otrzymano następujące wyniki:

$$5.36,\; 5.20,\; 5.28,\; 5.16,\; 5.30,\; 5.08,\; 5.23$$

analogicznie dla drugiego ula otrzymano:

$$5.15,\; 5.04,\; 5.30,\; 5.22,\; 5.19,\; 5.24,\; 5.12;$$

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie długości komórek w plastrach pochodzących z dwóch różnych uli są równe.

Rozwiązanie - test F

```
F test to compare two variances

data:  grupax and grupay
F = 1.2009, num df = 6, denom df = 6, p-value = 0.8298
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equa
95 percent confidence interval:
 0.2063511 6.9890227
sample estimates:
ratio of variances
          1.200913
```

Rozwiązanie - test t

```
Two Sample t-test

data:  grupax and grupay
t = 1.0437, df = 12, p-value = 0.3172
alternative hypothesis: true difference in means is not equ
95 percent confidence interval:
 -0.05438397  0.15438397
sample estimates:
mean of x mean of y
     5.23      5.18
```

W sytuacji gdy rozpatrywane przez nas zagadnienie nie spełnia wymienionych powyżej założeń. Przy czym celem naszym jest wykazanie istotnych różnic między populacjami pozostają nam wtedy **testy nieparametryczne**.