

Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

31 marca 2014

Człowiek za szafą rzuca razy monetą. Może on rzucać :

- 1 moneta symetryczną;
- 2 moneta, która ma orła z dwu stron.

- 1 Wymyśl procedurę pozwalającą stwierdzić jaka to moneta;
- 2 Opisz własnymi słowami problemy jakie mogą się pojawić.

Człowiek za szafą rzuca 10 razy monetą. Może on rzucać :

- 1 moneta symetryczną;
- 2 moneta, dla której $p = \frac{1}{3}$

- 1 Wymyśl procedurę pozwalającą stwierdzić jaka to moneta;
- 2 Opisz własnymi słowami problemy jakie mogą się pojawić.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & (p = 1/3) & \text{gdy } x = 0, 1, 2, 3; \\ 0, & (p = 1/2) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

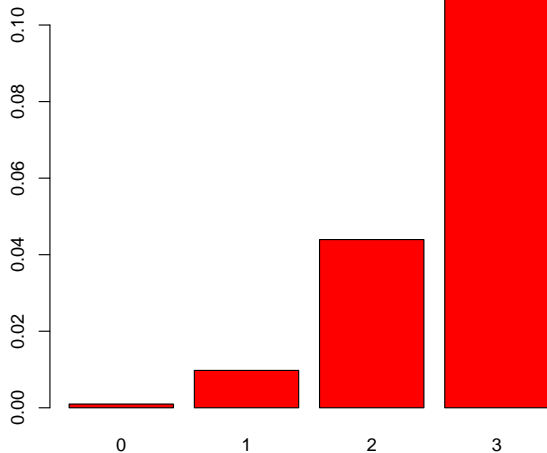
Opisz jakie popełniamy błędy stosując taką procedurę.

Jaką monetą rzuca człowiek za szafą? -ciąg dalszy problemów

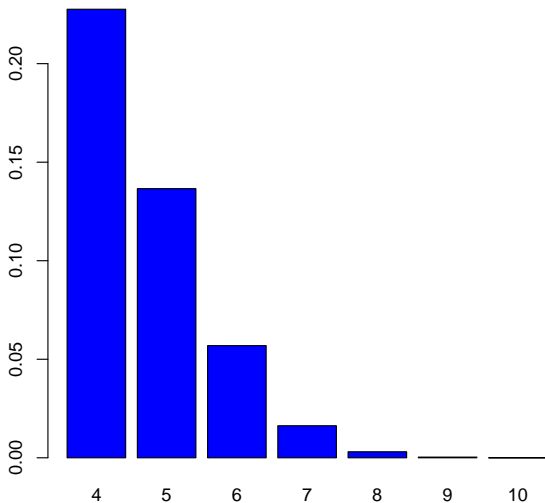
W trakcie wykonywania powyższej procedury pojawiają się następujące problemy:

- 1 $\phi = 1$ chociaż człowiek za szafą rzuca monetą symetryczną (błąd I rodzaju);
- 2 $\phi = 0$ chociaż człowiek za szafą rzuca monetą $p = \frac{1}{3}$ (błąd II rodzaju);

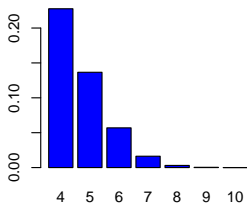
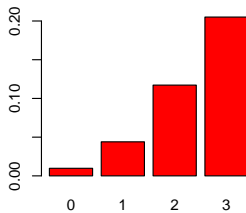
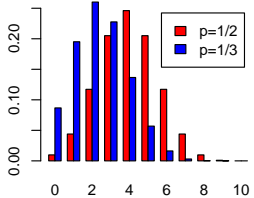
Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju



Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju



Podsumowanie



Jaką monetą rzuca człowiek za szafą?

- 1 Oblicz prawdopodobieństwo błędu I rodzaju dla takiej procedury.

Jaką monetą rzuca człowiek za szafą?

- 1 Oblicz prawdopodobieństwo błędu I rodzaju dla takiej procedury.
- 2 Oblicz prawdopodobieństwo błędu II rodzaju dla takiej procedury.

Uwaga

Przy tak skonstruowanej procedurze (teście) ϕ rzuca się w oczy bardzo duży błąd II rodzaju. Jak temu zaradzić?

Uwaga

Przy tak skonstruowanej procedurze (teście) ϕ rzuca się w oczy bardzo duży błąd II rodzaju. Jak temu zaradzić?

Uwaga

Jedną z możliwości jest zmiana sposobu orzekania tzn. koncentrujemy się tylko na minimalizacji błędu I rodzaju.

przypadek 1

Jeżeli $\phi(x) = 1$, to odrzucamy zdanie $p = 1/2$
(prawdziwe jest $p = 1/3$).

Jak to działa?

przypadek 1

Jeżeli $\phi(x) = 1$, to odrzucamy zdanie $p = 1/2$
(prawdziwe jest $p = 1/3$).

przypadek 2

Jeżeli $\phi(x) = 0$, to mówimy
„Nie ma podstaw do stwierdzenia, że $p = 1/3$ ”.

Pytanie

Czy średnia ilość punktów zdobytych przez studentów / roku jest równa 6?

Suma punktów 10 wybranych studentów to odpowiednio:

5, 10, 6, 7, 6, 8, 8, 9, 7, 5.

Średnia z tych liczb wynosi 7.1. Jak zatem odpowiedzieć na tak postawione pytanie?

Jak w takim przykładzie wymyślić procedurę testującą

Założenia

- 1 Jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_{10} \sim \mathcal{N}(\mu, 2)$, to $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 2/\sqrt{10})$;

Jak w takim przykładzie wymyślić procedurę testującą

Założenia

- 1 Jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_{10} \sim \mathcal{N}(\mu, 2)$, to $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 2/\sqrt{10})$;
- 2 $\sqrt{10}(\frac{\bar{X}-\mu}{2}) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

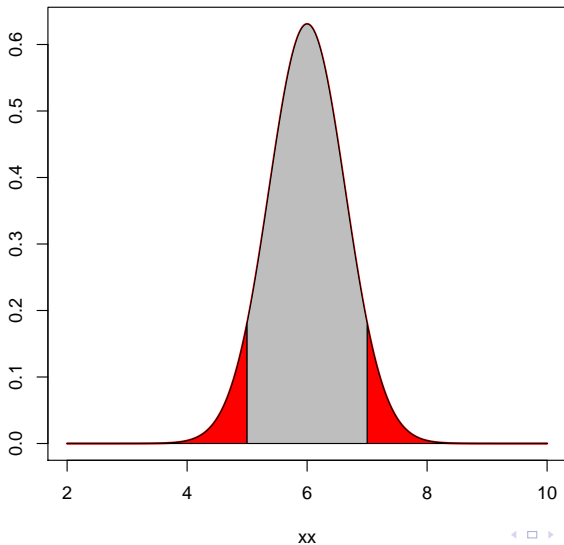
W naszym przykładzie dotyczącym studentów i ich ocen za statystykę testową przyjmijmy średnią z próby.

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i,$$

Za test statystyczny możemy przyjąć następującą regułę:

- 1 przyjmij, że $\mu = 6$ gdy $5 \leq T(X) \leq 7$,
- 2 odrzuć, że $\mu = 6$ gdy $T(X) < 5$ lub $T(X) > 7$.

Test studenci - punkty - rysunek



To samo tylko trochę bardziej formalnie

- 1 Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;

To samo tylko trochę bardziej formalnie

- 1 Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;
- 2 Zakładamy, że rozkłady obserwowanych zmiennych losowych dadzą się opisać przez zbiór parametrów Θ ;

To samo tylko trochę bardziej formalnie

- 1 Obserwujemy niezależne obserwacje pewnej zmiennej losowej pochodzącej z nieznanego rozkładu;
- 2 Zakładamy, że rozkłady obserwowanych zmiennych losowych dadzą się opisać przez zbiór parametrów Θ ;
- 3 Formułujemy pytanie (hipotezę) np. obserwowana próba pochodzi z rozkładu o parametrze $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$.

Z zasady formułujemy dwa pytania:

- *hipotezę zerową* H_0 ;
- *hipotezę alternatywną* H_1 ;

w taki sposób aby wzajemnie się wykluczały.

Przykład z monetami

- 1 $H_0 : p = 1/2$
- 2 $H_1 : p = 1/3$

Przykład z monetami

- 1 $H_0 : p = 1/2$
- 2 $H_1 : p = 1/3$

Przykład z punktami

- 1 $H_0 : \mu = 6;$
- 2 $H_1 : \mu \neq 6$

Test statystyczny

Testem statystycznym nazywamy regułę, która określa, dla jakich wyników eksperymentu $x \in X$ należy podjąć decyzję o

- przyjęciu H_0 ;
- odrzuceniu H_0 i przyjęciu H_1 .

Test statystyczny dzieli przestrzeń możliwych obserwacji \mathcal{X} na dwa rozłączne podzbiory:

- 1 obszar odrzucenia hipotezy zerowej (obszar krytyczny) $B \subset \mathcal{X}$;
- 2 obszar przyjęcia hipotezy zerowej B^c .

Przykład z monetami

- 1 $B = \{0, 1, 2, 3\}$
- 2 $B^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Przykład z punktami

1 $B = (-\infty, 5) \cup (7, +\infty)$

2 $B^c = \langle 5, 7 \rangle$

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.

Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

- 1 H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.

Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

- 1 H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;
- 2 H_1 : parametr **jest większy** od założonej liczby;

Parametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : parametr **jest równy** założonej liczbie.

Parametryczną hipotezę alternatywną możemy zapisać na kilka sposobów:

- 1 H_1 : parametr **nie jest równy** założonej liczbie;
- 2 H_1 : parametr **jest większy** od założonej liczby;
- 3 H_1 : parametr **jest mniejszy** od założonej liczby.

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : próba losowa **pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Nieparametryczną hipotezę zerową zapisujemy w następujący sposób:

H_0 : próba losowa **pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Hipotezę alternatywną zapisujemy w następujący sposób

H_1 : próba losowa **nie pochodzi z rozkładu** o dystrybuancie F

Możliwe sytuacje decyzyjne w badaniu hipotez statystycznych

Hipoteza H_0	H_0 prawdziwa	H_0 fałszywa
odrzuć H_0	błąd I rodzaju	decyzja poprawna
przyjąć H_0	decyzja poprawna	błąd II rodzaju

Uwaga

Podstawowym problemem testowania hipotez jest to, że decyzje podejmowane przez statystyka są obarczone błędem (I i II rodzaju). Dodatkowym zadaniem staje się zatem kontrola błędów wynikających z podejmowanych decyzji.

Kluczowym zagadnieniem w problemie testowania hipotez jest prawdopodobieństwo błędu I rodzaju (**powinno być ona jak najmniejsze**). Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju oznaczane jest przez α **poziom istotności**.

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach skoncentrujemy się na kontroli błędu I rodzaju. Tym samym najważniejszym problemem jest poprawne sformułowanie hipotezy zerowej (odrzućanej).

W rozpatrywanych przez nas zagadnieniach skoncentrujemy się na kontroli błędu I rodzaju. Tym samym najważniejszym problemem jest poprawne sformułowanie hipotezy zerowej (odrzucaanej).

Uwaga

W przypadku gdy test nie będzie w stanie odrzucić hipotezy zerowej będziemy mówić „nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy”.

Problemy z formułowaniem hipotezy zerowej i alternatywnej

Pewna firma farmaceutyczna chce sprawdzić czy nowy lek nie ma skutków ubocznych. Sprawdzenie zostanie wykonane za pomocą testu statystycznego. Zakładamy, że naszym celem jest kontrola błędu I rodzaju. Które z poniższych zagadnień testowych jest poprawnie sformułowane (z punktu widzenia tej firmy):

- 1
 - H_0 : lek nie ma skutków ubocznych;
 - H_1 : lek ma skutki uboczne;

Problemy z formułowaniem hipotezy zerowej i alternatywnej

Pewna firma farmaceutyczna chce sprawdzić czy nowy lek nie ma skutków ubocznych. Sprawdzenie zostanie wykonane za pomocą testu statystycznego. Zakładamy, że naszym celem jest kontrola błędu I rodzaju. Które z poniższych zagadnień testowych jest poprawnie sformułowane (z punktu widzenia tej firmy):

- 1 • H_0 : lek nie ma skutków ubocznych;
• H_1 : lek ma skutki uboczne;
- 2 • H_0 : lek ma skutki uboczne;
• H_1 : nie ma skutków ubocznych;

Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ przy czym parametr σ **jest znany**. Celem naszych badań jest stwierdzenie czy:

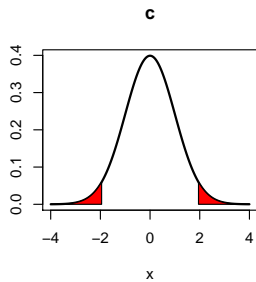
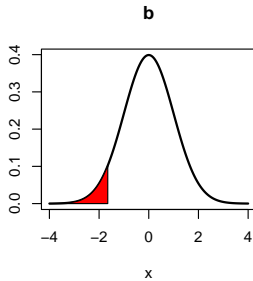
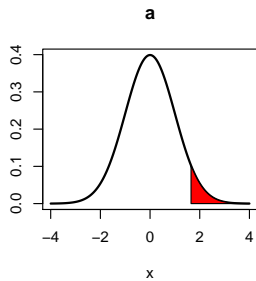
- 1 parametr $\mu > \mu_0$;
- 2 parametr $\mu < \mu_0$;
- 3 parametr $\mu \neq \mu_0$.

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

- (a) $\mu > \mu_0$,
- (b) $\mu < \mu_0$,
- (c) $\mu \neq \mu_0$



Konstrukcja statystyki testowej Model 1.

$$\phi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jak to działa?

Jeżeli $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{1-\alpha}$ to hipotezę H_0 odrzucamy. W przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Uwaga

$u_{1-\alpha}$ jest to oczywiście kwantyl rzędu $1 - \alpha$ z rozkładu $N(0, 1)$.

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0, 1)$ testujemy hipotezę:

- $H_0 : \mu = \mu_0$;
- $H_1 : \mu > \mu_0$.

1 Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0, 1)$ testujemy hipotezę:

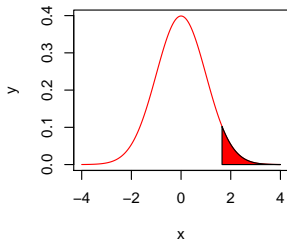
- $H_0 : \mu = \mu_0$;
 - $H_1 : \mu > \mu_0$.
- 1 Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$
 - 2 Powtórzmy to doświadczenie $n = 200$ razy ilu należy się spodziewać błędnych odrzuceń?

Mamy próbę losową 100-elementową z rozkładu $N(0, 1)$ testujemy hipotezę:

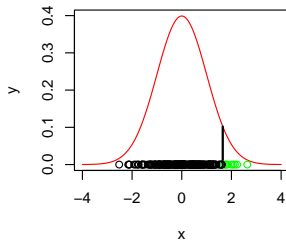
- $H_0 : \mu = \mu_0$;
 - $H_1 : \mu > \mu_0$.
- 1 Przetestuj to zagadnienie na poziomie istotności $\alpha = 0.05$
 - 2 Powtórzmy to doświadczenie $n = 200$ razy ilu należy się spodziewać błędnych odrzuceń?
 - 3 Wykonaj ten eksperyment w sytuacji gdy 100 elementowa próba pochodzi z rozkładów $N(0.05, 1)$, $N(0.3, 1)$.

Zadanie

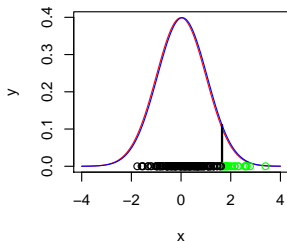
Zbiór krytyczny $N(0,1)$



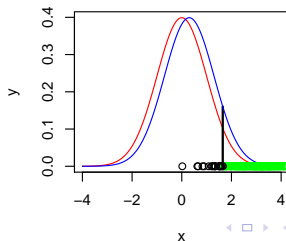
Wart stat test $n=200, N(0,1)$



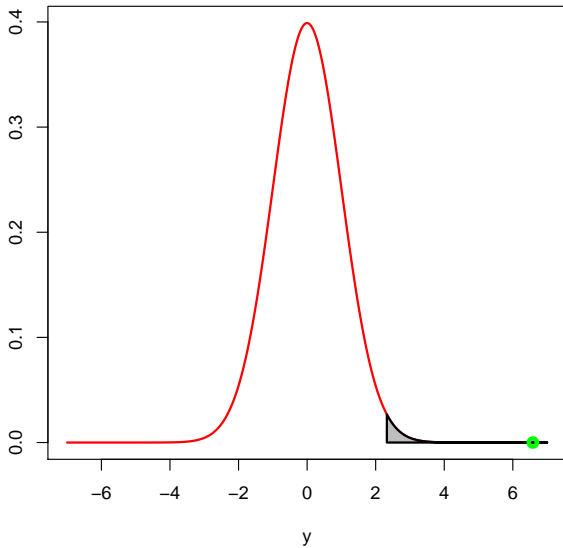
Wart stat test $n=200, N(0.05, 1)$



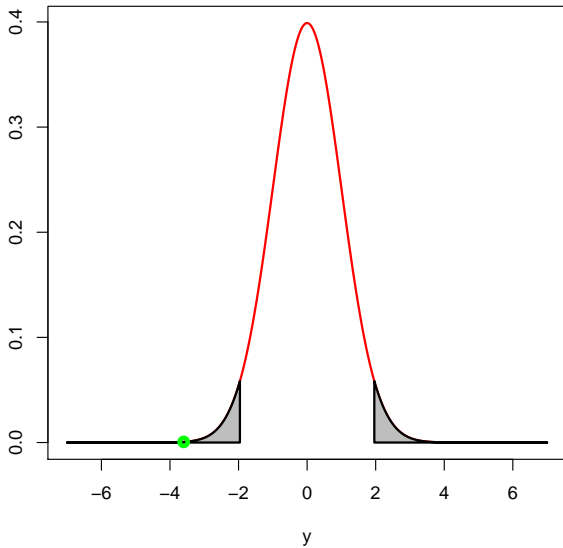
Wart stat test $n=200, N(0.3, 1)$



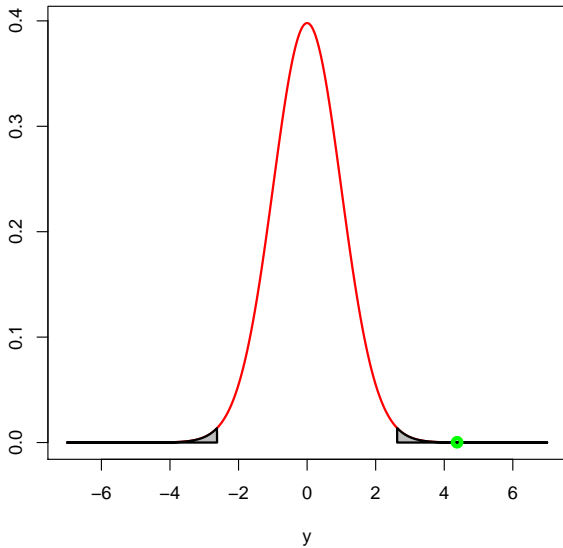
Norma techniczna przewiduje średnio 55 sek na wykonanie pewnej operacji technicznej. Ponieważ robotnicy skarżyli się, że norma jest zła dokonano pomiarów chronometryczowych dla $n = 60$ wylosowanych robotników i otrzymano z tej próby średnią $\bar{x} = 72$ sek oraz $S_n = 20$ sek. Czy można na poziomie istotności $\alpha = 0.01$ odrzucić hipotezę, że rzeczywisty średni czas operacji jest zgodny z normą?



Zbadano w 81 wylosowanych zakładach koszty materiałowe i otrzymano średnią $\bar{x} = 540$ oraz $S_n = 150$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie koszty materiałowe przy produkcji tego wyrobu wynoszą 600.



Badając w 1966 r. w pewnym dużym zakładzie przemysłowym absencję pracujących tam kobiet stwierdzono, że w wylosowanej próbie 100 pracownic tego zakładu średni czas przebywania ich na zwolnieniach lekarskich wyniósł $\bar{x} = 38$ dni, odchylenie standardowe $s_n = 16$ dni. Czy można na tej podstawie stwierdzić, że średni roczny czas zwolnień lekarskich dla pracownic tego zakładu jest dłuższy niż miesiąc, tj. 31 dni? Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0.01$.



Niech X_1, X_2, \dots, X_n będzie próbą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ przy czym parametr σ **jest nieznanym**. Celem naszych badań jest stwierdzenie czy:

- 1 parametr $\mu > \mu_0$;
- 2 parametr $\mu < \mu_0$;
- 3 parametr $\mu \neq \mu_0$.

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

(a) $\mu > \mu_0$.

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

- (a) $\mu > \mu_0$,
- (b) $\mu < \mu_0$,

Zagadnienie to można sprowadzić do testowania hipotezy

$$H_0 : \mu = \mu_0;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

- (a) $\mu > \mu_0$,
- (b) $\mu < \mu_0$,
- (c) $\mu \neq \mu_0$

$$\phi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jak to działa

Jeżeli $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}$ to hipotezę H_0 odrzucamy w przeciwnym przypadku nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 .

Uwaga

$t_{1-\alpha}$ jest to oczywiście kwantyl rzędu $1 - \alpha$ z rozkładu studenta o $n - 1$ stopniach swobody.

Producent zapewnia, że żywotność pewnego rodzaju baterii wynosi ponad 500 h. W losowej próbie 28 baterii otrzymano średnią 510 h z wariancją 900 h. Czy zapewnienia producenta są zasadne na poziomie istotności $\alpha = 0.01$?

W pewnym doświadczeniu biochemicznym bada się czas życia pewnych komórek w pewnym środowisku. Rozkład tego czasu można przyjąć z normalny. Dokonano 8 pomiarów i otrzymano następujące czasy życia tych komórek w tym środowisku 5.3, 4.0, 3.8, 6.2, 5.5, 4.5, 6.0, 4.7. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$ sprawdzić hipotezę że średni czas życia komórek w tym środowisku wynosi 4.0 godziny.

One Sample t-test

data: z

t = 3.1736, df = 7, p-value = 0.01563

alternative hypothesis: true mean is not equal to 4

95 percent confidence interval:

4.254916 5.745084

sample estimates:

mean of x

5

Wylosowano niezależnie 10 indywidualnych gospodarstw rolnych w pewnej wsi i otrzymano dla nich następujące wielkości uzyskanych plonów owsa (w q/ha):

18.1, 17.0, 17.5, 17.8, 18.3, 16.7, 18.0, 15.9, 17.6, 18.1 Na poziomie istotności $\alpha = 0.10$ zweryfikować hipotezę, że średni plon owsa w tej wsi wynosi $18q/ha$.

One Sample t-test

data: z

t = 56.3807, df = 9, p-value = 8.743e-13

alternative hypothesis: true mean is not equal to 4

95 percent confidence interval:

16.95834 18.04166

sample estimates:

mean of x

17.5

Co zrobić gdy chcemy przetestować hipotezę o średniej z próby X_1, \dots, X_k w sytuacji gdy próba ta nie pochodzi z rozkładu normalnego?

Odpowiedź

- 1 W przypadku dużej liczności próby użyć statystyki $\frac{\bar{X} - \mu}{S_n / \sqrt{n}}$ i użyć CTG (test z);

Co zrobić gdy chcemy przetestować hipotezę o średniej z próby X_1, \dots, X_k w sytuacji gdy próba ta nie pochodzi z rozkładu normalnego?

Odpowiedź

- 1 W przypadku dużej liczności próby użyć statystyki $\frac{\bar{X} - \mu}{S_n / \sqrt{n}}$ i użyć CTG (test z);
- 2 W przypadku małej liczności próby przyjąć (o ile to możliwe) założenie, że próba pochodzi z innego opisanego rozkładu i skonstruować test.

Obserwujemy następującą grupę danych

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_{n-1}, Y_{n-1}), (X_n, Y_n)$$

Przy czym $X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ oraz $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Niech $D_i = Y_i - X_i$. Testujemy następującą hipotezę zerową

$$H_0 : \mu_D = 0;$$

Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\frac{\bar{d}}{S_{n-1}} \sqrt{n}.$$

W teście badającym pamięć uczniów dla 8 wylosowanych uczniów otrzymano następujące rezultaty (liczby zapamiętanych elementów): 16, 13, 14, 21, 19, 18, 26, 17. Natomiast po specjalnym treningu pamięci grupa ta wykazała następujące wyniki: 21, 17, 20, 26, 23, 22, 21, 18. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że trening zwiększa liczbę zapamiętanych przez uczniów elementów.

Paired t-test

data: y and x

t = 2.3932, df = 7, p-value = 0.02397

alternative hypothesis: true difference in means is greater

95 percent confidence interval:

0.62502 Inf

sample estimates:

mean of the differences

3

Zmierzono czas reakcji na bodziec 8 kierowców przed i w 15 minut po wypiciu 100g wódki. Wyniki przed wypiciem wódki były następujące (w sekundach) :
0.22, 0.18, 0.16, 0.19, 0.20, 0.23, 0.17, 0.25 a po wypiciu wódki:
0.28, 0.25, 0.20, 0.30, 0.9, 0.26, 0.28, 0.24. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że wódka zwiększa czas reakcji na bodziec.

Paired t-test

data: y and x

t = 1.704, df = 7, p-value = 0.9339

alternative hypothesis: true difference in means is less th

95 percent confidence interval:

-Inf 0.2930173

sample estimates:

mean of the differences

0.13875

Założmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_k o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) $H_1 :$

Założmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_k o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

- (a) $\mu_X > \mu_Y,$
- (b) $\mu_X < \mu_Y,$

Założmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_k o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$. Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y;$$

Przy alternatywach (kolejno) H_1 :

- (a) $\mu_X > \mu_Y$,
- (b) $\mu_X < \mu_Y$,
- (c) $\mu_X \neq \mu_Y$

Skoncentrujemy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

- 1 parametry σ_X i σ_Y są **znane**;

Skoncentrujmy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

- 1 parametry σ_X i σ_Y są **znane**;
- 2 parametry σ_X i σ_Y są **nieznane** ale **równe**;

Skoncentrujemy się na przypadku (a). Rozważmy następujące sytuacje:

- 1 parametry σ_X i σ_Y są **znane**;
- 2 parametry σ_X i σ_Y są **nieznane** ale **równe**;
- 3 parametry σ_X i σ_Y są **nieznane i nierówne**.

W sytuacji 1 statystyka testowa przyjmie postać

W sytuacji 1 statystyka testowa przyjmie postać

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 2 statystyka testowa przyjmie postać:

W sytuacji 2 statystyka testowa przyjmie postać:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{nS_X^2 + kS_Y^2}{n+k-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k}\right)}} > t_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 3 statystyka testowa przyjmie postać (zakładamy dużą licznosc próby)

W sytuacji 3 statystyka testowa przyjmie postać (zakładamy dużą licznosc próby)

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{k}}} > u_{1-\alpha} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W sytuacji 3 i przy małej liczebności próby stosujemy test Cochran-Coxa. Statystyka testowa przyjmuje wtedy postać

W sytuacji 3 i przy małej liczebności próby stosujemy test Cochran-Coxa. Statystyka testowa przyjmuje wtedy postać

$$C = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_{n_1-1}^2}{n_1-1} + \frac{S_{n_2-1}^2}{n_2-1}}}$$

Rozkład zmiennej losowej C zależy od liczności prób oraz od stosunku σ_1/σ_2 , który jest nieznan, jednakże dla n_1 i n_2 można policzyć przybliżoną wartość krytyczną testu $C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$

$$C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) = \frac{\frac{S_{n_1-1}^2}{n_1-1} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1) + \frac{S_{n_2-1}^2}{n_2-1} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1)}{\frac{S_{n_1-1}^2}{n_1-1} + \frac{S_{n_2-1}^2}{n_2-1}}$$

Sposób postępowania

Jeżeli $|C| > C_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$, to odrzucamy hipotezę H_0 na poziomie istotności α .

UWAGA

W sytuacji małych prób zastosowanie testu studenta bądź testu Cochran-Coxa powinno być uzależnione od wyniku testu F .

Założmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_k o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$.

Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y.$$

Założmy, że obserwujemy dwie proste próby losowe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ oraz Y_1, Y_2, \dots, Y_k o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ i $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$.

Naszym celem jest zweryfikowanie następującej hipotezy:

$$H_0 : \sigma_X = \sigma_Y.$$

Przy hipotezie alternatywnej:

$$H_1 : \sigma_X \neq \sigma_Y.$$

Statystyka testowa przyjmuje postać

$$F = \frac{S_{n_X-1}^2}{S_{n_Y-1}^2}.$$

W przypadku gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa statystyka F ma rozkład Snedecora o $(n_X - 1, n_Y - 1)$ stopniach swobody.

Pojemność życiowa płuc studentów uprawiających czynnie sport ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym 440cm^3 , natomiast dla studentów nie uprawiających sportu ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym 620cm^3 . Wylosowano z obu populacji studentów dwie próby: dla studentów uprawiających sport próbę o liczności $n = 20$ i średniej $\bar{x} = 4080\text{cm}^3$, a dla studentów nie uprawiających sportu próbę licznosci $n = 15$ i średniej $\bar{x} = 3610\text{cm}^3$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.01$ sprawdzić hipotezę, że uprawianie przez studentów sportu zwiększa pojemność życiową płuc.

Pobrano dwie losowe próby ziaren fasoli i zmierzono długość ziaren. W przypadku A otrzymano $n = 450$, $\bar{x} = 12.3mm$, $S_{nA} = 1.8mm$. Natomiast dla gatunku B otrzymano $n = 500$, $\bar{x} = 11.9mm$, $S_{nB} = 2.1mm$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie długości ziaren obu gatunków są takie same.

W celu stwierdzenia czy podanie pewnego preparatu farmaceutycznego zmienia frakcję pewnego białkaw moczu królików, dokonano pomiarów frakcji tego białka w grupie kontrolnej K , oraz pomiarów w grupie królików Z , którym podano preparat farmaceutyczny. Wyniki były następujące w (%)

W celu stwierdzenia czy podanie pewnego preparatu farmaceutycznego zmienia frakcję pewnego białka w moczu królików, dokonano pomiarów frakcji tego białka w grupie kontrolnej K , oraz pomiarów w grupie królików Z , którym podano preparat farmaceutyczny. Wyniki były następujące w (%)

[1] 18.70 7.40 0.80 34.50 45.50 10.01 19.50 40.20 11.50

[1] 27.4 13.9 10.3 9.6 5.7 3.0 19.1 4.8 12.2

Sprawdzić założenie o równości wariancji dla tych dwóch prób, następnie wykonać test t dla dwóch prób (poziom istotności $\alpha = 0.05$).

F test to compare two variances

data: K and Z

F = 4.1585, num df = 8, denom df = 8, p-value = 0.05988

alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal

95 percent confidence interval:

0.9380206 18.4356634

sample estimates:

ratio of variances

4.158489

Welch Two Sample t-test

data: K and Z

t = 1.5689, df = 11.637, p-value = 0.1434

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-3.590286 21.836953

sample estimates:

mean of x mean of y

20.90111 11.77778

Zmierzono w dwóch ulach średnicę komórek plastra zbudowanego przez pszczoły. Dla 7 wylosowanych komórek z pierwszego ula otrzymano następujące wyniki:

5.36, 5.20, 5.28, 5.16, 5.30, 5.08, 5.23

analogicznie dla drugiego ula otrzymano:

5.15, 5.04, 5.30, 5.22, 5.19, 5.24, 5.12;

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że średnie długości komórek w plastrach pochodzących z dwóch różnych uli są równe.

F test to compare two variances

data: grupax and grupay

F = 1.2009, num df = 6, denom df = 6, p-value = 0.8298

alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal

95 percent confidence interval:

0.2063511 6.9890227

sample estimates:

ratio of variances

1.200913

Two Sample t-test

data: grupax and grupay

t = 1.0437, df = 12, p-value = 0.3172

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-0.05438397 0.15438397

sample estimates:

mean of x mean of y

5.23 5.18

W sytuacji gdy rozpatrywane przez nas zagadnienie nie spełnia wymienionych powyżej założeń. Przy czym celem naszym jest wykazanie istotnych różnic między populacjami pozostają nam wtedy **testy nieparametryczne**.