Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł, Błażej

28 lutego 2016

Zasady

- 14 wykładów;
- egzamin pisemny;

Literatura

1. A. Łomnicki „Wprowadzenie do statystyki dla przyrodników" PWN 1999;
2. W. Krysicki, J. Bartoś, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach" PWN 1997;
3. J. Koronacki, J. Mielniczuk „Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych" WNT 2006.

4. Slajdy do wykładu są dostępne na stronie: `http://smorfland.uni.wroc.pl/~blazej/Statystyka/wykladPAN`

Zaczynamy

Doświadczenie losowe

Realizacja (rzeczywista bądź tylko myślowa) określonego zespołu warunków, wraz z góry określonym zbiorem wyników.

Doświadczenie losowe

- Poszczególne wyniki ω doświadczenia losowego traktujemy jako **zdarzenia elementarne**.
- Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** Ω.

Uwaga

W praktyce najczęściej interesujące są nie pojedyncze zdarzenia lecz podzbiory Ω. Każdy taki podzbiór nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Zbiór wszystkich zdarzeń losowych będziemy nazywać przestrzenią zdarzeń losowych i oznaczamy ją przez $\mathcal{F}$.

Określenie działań na zdarzeniach losowych w języku zbiorów

Na zdarzeniach losowych wykonujemy analogiczne działania jak na zbiorach.

1. zdarzenie niemożliwe interpretujemy jako zbiór pusty $\emptyset$;
2. sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A lub B;
3. przekrój zbiorów A i B oznaczamy przez $A \cap B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A i B;

Określenie działań na zdarzeniach losowych w języku zbiorów

1. różnicę zbiorów A i B oznaczamy przez $A \backslash B$, jest to zbiór tych zdarzeń elementarnych ω, które należą do A i nie należą do B;
2. dopełnienie zbioru A oznaczamy przez $A' = \Omega \backslash A$;
3. mówimy, że zdarzenie A pociąga zdarzenie B, co oznaczamy przez $A \subset B$, jeżeli każde zdarzenie elementarne $\omega \in A$ należy również do B $(\omega \in B)$;
4. mówimy, że zdarzenia A i B wykluczają się, gdy $A \cap B = \emptyset$.

Zadanie

Podać przykład doświadczenia losowego i opisać je za pomocą przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Odpowiedź

Rzut monetą

1. przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\mathbf{O}, \mathbf{R}\}$;
2. zdarzenia elementarne $\omega_1 = \mathbf{O}$, $\omega_2 = \mathbf{R}$;
3. zdarzenia losowe $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\mathbf{O}\}, \ \{\mathbf{R}\}, \ \{\mathbf{O}, \ \mathbf{R}\}\}$

Interpretacja działań na zbiorach

1. Przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych często będziemy interpretowali jako prostokąt na płaszczyźnie;

Interpretacja działań na zbiorach

1. Przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych często będziemy interpretowali jako prostokąt na płaszczyźnie;
2. punkty tego prostokąta - wszystkie albo tylko zaznaczone - jako zdarzenia elementarne;

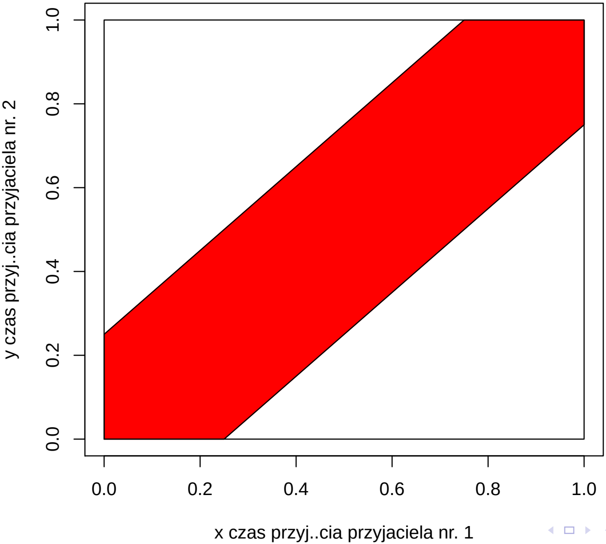
Interpretacja działań na zbiorach

1. Przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych często będziemy interpretowali jako prostokąt na płaszczyźnie;
2. punkty tego prostokąta - wszystkie albo tylko zaznaczone - jako zdarzenia elementarne;
3. zajście zdarzenia elementarnego możemy traktować jako rezultat losowo rzuconego punktu na ten prostokąt.

Zadanie

Dwoje przyjaciół umówiło się na spotkanie w restauracji pomiędzy godziną 18 a 19 zastrzegając jednocześnie, że pierwszy przychodzący czeka na drugiego tylko 15 minut. Opisz graficznie przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zaznacz zdarzenia sprzyjające.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych interpretacja graficzna



Definicja prawdopodobieństwa

Przestrzeń probabilistyczna

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω to przestrzeń zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń (podzbiorów zbioru Ω), P to funkcja określająca prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń ze zbioru $\mathcal{F}$.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

1. przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych;

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

1. przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych;
2. zdarzenia jednoelementowe $\{\omega\}$ są jednakowo prawdopodobne, a więc

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n};$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

1. przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych;
2. zdarzenia jednoelementowe $\{\omega\}$ są jednakowo prawdopodobne, a więc

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n};$$

3. prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A składającego się z k zdarzeń elementarnych wyraża się wzorem:

$$P(A) = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni } \Omega}$$

Przykład - Rzut kostką

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, gdzie ω_i, dla $i = 1, 2, \ldots, 6$ oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu i oczek.

Przy założeniu, że kostka jest symetryczna wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne.

Zatem dla $A \subset \Omega$ otrzymujemy:

$$P(A) = \frac{\#\{w_i \in A\}}{\#\{w_i \in \Omega\}}$$

Zadanie

Dziecko bawi się następującymi klockami $m, a, t, e, m, a, t.y, k, a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo je układając ułoży ono słowo **matematyka**?

Zadanie

Z n elementowego zbioru A losujemy ze zwracaniem k elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy są różne.

Losujemy 5 kart z 52. Oblicz prawdopodobieństwa wylosowania następujących układów kart

- pary;
- trójki;
- karety;
- koloru;
- poker.

Definicja prawdopodobieństwa

Własności funkcji prawdopodobieństwa P

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. jeżeli $A_1, \ldots, A_n$ jest dowolnym ciągiem parami rozłącznych zadarzeń ze zbioru $\mathcal{F}$, to

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Warunki powyższe nazywamy aksjomatami prawdopodobieństwa sformułował je w 1931 r. A.N. Kołmogorow.

Elementarne własności prawdopodobieństwa

1. prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równa się zero: $P(\emptyset) = 0$;
2. jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B ($A \subset B$), to $P(A) \leqslant P(B)$;
3. prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest nie większe niż jeden ($P(A) \leqslant 1$), A dowolne;
4. jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B ($A \subset B$), to $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Rzut kostką - ciąg dalszy

Załóżmy, że w tym eksperymencie jedyne wyniki jakie możemy obserwować są liczbami parzystymi. Jakie jest zatem prawdopodobieństwo tego, że wyrzucona liczba oczek będzie równa 2?

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwem warunkowym dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ pod warunkiem B nazywamy liczbę $P(A|B)$ określoną przez następującą równość:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \ A, B \in \mathcal{F}, P(B) > 0.$$

Zadanie

Podaj wartość $P(A|B)$, jeśli:

(a) A i B wykluczają się

(b) $A \subset B$;

(c) $B \subset A$.

Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli B jest dowolnym zdarzeniem, natomiast zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają warunki:

1. wykluczają się parami, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ gdy $i \neq j$;
2. ich suma jest zdarzeniem pewnym, czyli
$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega;$$
3. mają dodatnie prawdopodobieństwa;

to prawdopodobieństwo zdarzenia B wyraża się równością

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Zadanie

Pewna choroba występuje w społeczeństwie z prawdopodobieństwem 0.001. Do wykrycia choroby sporządzono test T, który stwierdza chorobę z prawdobodobieństwem 0.99 u osób chorych i 0.05 u osób zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że test da wynik pozytywny ("jestes chory") dla losowo wybranej osoby?

Rozwiązanie

1. $T = 1$ test "mówi chory";
2. $Z = 1$ osoba chora;
3. $Z = 0$ osoba zdrowa.

$$P(T = 1) = P(T = 1|Z = 1)P(Z = 1) + P(T = 1|Z = 0)P(Z = 0)$$

Można także spróbować odpowiedzieć na następujące pytanie: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dla osoby rzeczywiście chorej test "powiedział jesteś zdrowy"?

Rozwiązanie

$$P(Z=1|T=0) = \frac{P(T=0|Z=1)P(Z=1)}{P(T=0|Z=1)P(Z=1) + P(T=0|Z=0)P(Z=0)}$$

Twierdzenie Bayesa

Jeżeli B jest dowolnym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie, $P(B) > 0$, zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają warunki wymienione w twierdzeniu o prawdopodobieństwie całkowitym, to prawdopodobieństwo warunkowe $P(A_k|B)$, $k = 1, \ldots, n$ wyraża się wzorem

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Zadanie

Populacja π jest mieszaniną trzech podpopulacji π_1, π_2, π_3 o których wiadomo, że stanowią odpowiednio $60, 30, 10\%$ populacji π. Pewna cecha jakościowa X występuje u osobników podpopulacji π_1 z częstością 0.05, podpopulacji π_2 0.03 i podpopulacji π_3 – 0.02. Obliczyć:

1. prawdopodobieństwo całkowite natrafienia w populacji na osobnika posiadającego cechę X.

Zadanie

Populacja π jest mieszaniną trzech podpopulacji π_1, π_2, π_3 o których wiadomo, że stanowią odpowiednio $60, 30, 10\%$ populacji π. Pewna cecha jakościowa X występuje u osobników podpopulacji π_1 z częstością 0.05, podpopulacji π_2 0.03 i podpopulacji π_3 – 0.02. Obliczyć:

1. prawdopodobieństwo całkowite natrafienia w populacji na osobnika posiadającego cechę X.
2. prawdopodobieństwo, że osobnik wybrany z populacji, u którego stwierdzono cechę X, pochodzi z podpopulacji π_1.

Niezależność zdarzeń

Mówimy, że zdarzenia $A, B \in \mathcal{F}$ są **niezależne**, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadanie

W urnie są kule białe i czerwone. Losujemy kolejno dwie kule:

(a) ze zwracaniem pierwszej kuli do urny przed losowaniem drugiej;

(b) bez zwracania.

Kiedy zdarzenia

- **A**- wylosowanie kuli białej w pierwszym losowaniu.
- **B**- wylosowanie kuli czerwonej w drugim losowaniu.

są niezależne?

Zadanie

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne i $P(A_k) = p_k$. Oblicz prawdopodobieństwo, że zajdzie przynajmniej jedno z tych zdarzeń.