Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

23 kwietnia 2014

Analiza wariancji klasyfikacja jednokierunkowa - wstęp

Przypuśćmy, że chcemy porównać większą (niż dwie) liczbę grup. Aby porównać średnie w kilku grupach, można przeprowadzić **analizę wariancji**.

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Jak widać w serii i wykonaliśmy n_i pomiarów.

Przyjmujemy, że zmienne X_{ij} są niezależne.

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Jak widać w serii i wykonaliśmy n_i pomiarów.

Przyjmujemy, że zmienne X_{ij} są niezależne.

Uwaga

Wariancje są równe dla wszystkich grup!!!

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujacy sposób:

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujacy sposób:

Przynajmniej w jednej grupie parametr μ różni się istotnie od pozostałych

Analiza wariancji klasyfikacja jednokierunkowa

Statystyka testową w analizie wariancji jest:

$$F = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/(n-k)}$$

gdzie $n = \sum n_i$ oraz

$$SSA = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2, \;\; SSE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2.$$

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka testowa F ma rozkład Snedecora z $k-1$ i $n-k$ stopniami swobody.

UWAGA, UWAGA, UWAGA, ...

Założenie o tym, że wariancje we wszystkich grupach są równe jest istotne dlatego przed zastosowaniem analizy wariancji należy je sprawdzić używając np. testu Bartletta.

Test Bartletta

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

Test Bartletta

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0 : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2.$$

Test Bartletta

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0 : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujacy sposób:

Test Bartletta

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujacy sposób:

Przynajmniej w jednej grupie parametr σ^2 różni się istotnie od pozostałych

Test Bartletta - statystyka testowa

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c}[(n-k)log(S^2) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)log(S^2_{n_i-1})]$$

Test Bartletta - statystyka testowa

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c}[(n-k)log(S^2) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)log(S^2_{n_i-1})]$$

gdzie: $S^2_{n_i-1} = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$, $S^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k} S^2_{n_i-1}$ oraz

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k})$$

Test Bartletta - statystyka testowa

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c}[(n-k)log(S^2) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)log(S^2_{n_i-1})]$$

gdzie: $S^2_{n_i-1} = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$, $S^2 = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k} S^2_{n_i-1}$ oraz

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k})$$

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka testowa χ^2 ma rozkład *chi*-kwadrat z $k-1$ stopniami swobody.

Zadanie

Do pewnych doświadczeń farmakologicznych wybierano są króliki jednorodne pod względem wagi. Wybrano losowo po 5 królików z poszczególnych grup i otrzymano następujące wyniki (w *kg*):

	A	B	C	D
1	2.95	3.20	3.05	3.00
2	2.80	3.05	3.30	3.30
3	3.10	2.90	3.15	2.75
4	3.00	3.05	3.20	2.85
5	3.15	3.05	2.80	3.10

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że wariancja wagi królików we wszystkich czterech grupach jest jednakowa.

Rozwiązanie - Test Bartletta

```
Bartlett test of homogeneity of variances

data:  waga by group
Bartlett's K-squared = 2.067, df = 3, p-value = 0.5586
```

Jak policzyć SSA i SSE ?

Króliki

$$SSA = 5 * (3 - 3.0375)^2 + 5 * (3.05 - 3.0375)^2 + 5 * (3.1 - 3.0375)^2 + 5 * (3 - 3.0375)^2$$

$$SSE = n_1 \cdot S^2_{n_1} + n_2 \cdot S^2_{n_2} + n_3 \cdot S^2_{n_3} + n_4 \cdot S^2_{n_4}$$

$$SSE = 0.075 + 0.0450000000000001 + 0.145 + 0.185$$

Ostatecznie

$$SSA = 0.034375$$

$$SSE = 0.45$$

Analiza wariancji króliki

```
Analysis of Variance Table

Response: plon
          Df  Sum Sq  Mean Sq F value Pr(>F)
group      3 0.03438 0.011458  0.4074 0.7498
Residuals 16 0.45000 0.028125
```

Jak czytać powyższe wyniki?

1. *Df* - stopnie swobody;

Jak czytać powyższe wyniki?

1. *Df* - stopnie swobody;
2. $Sum\ Sq\ group = SSA$;

Jak czytać powyższe wyniki?

1. *Df* - stopnie swobody;
2. $Sum\ Sq\ group = SSA$;
3. $Sum\ Sq\ residuals = SSA$;

Jak czytać powyższe wyniki?

1. Df - stopnie swobody;
2. $Sum\ Sq\ group = SSA$;
3. $Sum\ Sq\ residuals = SSA$;
4. $Mean\ Sq\ group = SSA/(k-1)$;

Jak czytać powyższe wyniki?

1. *Df* - stopnie swobody;
2. $Sum\ Sq\ group = SSA$;
3. $Sum\ Sq\ residuals = SSA$;
4. $Mean\ Sq\ group = SSA/(k-1)$;
5. $Mean\ Sq\ residuals = SSE/(n-k)$;

Jak czytać powyższe wyniki?

1. Df - stopnie swobody;
2. $Sum\ Sq\ group = SSA$;
3. $Sum\ Sq\ residuals = SSA$;
4. $Mean\ Sq\ group = SSA/(k-1)$;
5. $Mean\ Sq\ residuals = SSE/(n-k)$;
6. F warość statystyki testowej.

Zadanie

W tabeli są podane wielkości zbioru pszenicy ozimej otrzymane przy zastosowaniu czterech możliwych dawek azotu jako nawozu. Każdą z dawek azotu zastosowano na 8 poletkach Zbadać, czy średnia wielkość plonu zależy od użytej ilości nawozu.

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	64.50	64.80	69.30	69.00
2	66.30	66.50	70.30	71.50
3	69.30	66.80	70.00	71.30
4	67.00	67.30	69.00	72.00
5	74.00	77.30	76.30	77.00
6	75.80	71.50	72.00	74.50
7	72.00	74.00	72.50	79.00
8	72.50	74.50	76.80	79.80

Test Bartletta

Bartlett test of homogeneity of variances
data: plon by group Bartlett's K-squared = 1.0934, df = 3, p-value = 0.7787

```
Analysis of Variance Table

Response: plon
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
group      3  86.83  28.944  1.8605 0.1592
Residuals 28 435.61  15.557
```

Zadanie

W tabeli znajdują się dane o przeżywalności chrząszczy mącznych hodowanych na różnych pożywkach. Dla tych danych testować będziemy hipotezę, że między różnymi pożywkami nie ma różnic w przeżywalności chrząszczy.

	A	B	C	D	E
MP0	58.00	60.00	51.00	66.00	62.00
MP5	65.00	70.00	64.00	75.00	68.00
MP2	69.00	62.00	70.00	63.00	65.00
MPR	63.00	68.00	68.00	60.00	66.00

Rozwiązanie - Analiza wariancji

```
Analysis of Variance Table

Response: pozywka
          Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
group      3 215.35  71.783  3.8387 0.03028 *
Residuals 16 299.20  18.700
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘
```

Uwaga

Jeżeli analiza wariancji nie wykaże istotności różnic między rozpatrywanymi grupami, nie przeprowadza się już dalszych testów. Natomiast kiedy hipoteza zerowa zostanie odrzucona w analizie wariancji, to powstaje pytanie, które z porównywanych populacji są odpowiedzialne za odrzucenie hipotezy zerowej. Chcemy wiedzieć, które z n średnich różnią się między sobą, a które są równe.

Uwaga

1. Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo;

Uwaga

1. Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo;
2. Na tym wykładzie wyróżnimy następujące:

Testy *a posteriori*

Uwaga

1. Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo;
2. Na tym wykładzie wyróżnimy następujące:
   1. Test Bonferoniego;

Testy *a posteriori*

Uwaga

1. Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo;
2. Na tym wykładzie wyróżnimy następujące:
   1. Test Bonferoniego;
   2. Test Tukeya.

Test Bonferroniego

Jeżeli porównujemy k grup, to porównanie „każdy z każdym"wymaga wykonania $K = \frac{k(k-1)}{2}$ testów. Dla pojedynczego testu statystyka testowa przyjmuje postać:

$$t_{ij} = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{s^2\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

Przy czym

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k}.$$

Rozkład statystyki testowej

Przy prawdziwości hipotezy zerowej

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k;$$

statystyka t_{ij} ma rozkład studenta z $n-k$ stopniami swobody.

Uwaga, Uwaga, Uwaga.....

1. poziom istotności pojedynczego testu;

Test Bonferroniego

Uwaga, Uwaga, Uwaga.....

1. poziom istotności pojedynczego testu;
2. poziom istotności całej procedury.

Uwaga

Aby poziom istotności całej procedury był na poziomie α poziom istotności pojedynczego testu powinien być na poziomie α/K.

Przykład zastosowania - chrząszcze

```
Study: aov(fit) ~ "group"

LSD t Test for pozywka
P value adjustment method: bonferroni

Mean Square Error:  18.7

group,  means and individual ( 95 %) CI

    pozywka      std r      LCL      UCL Min Max
MP0    59.4 5.549775 5 55.3003 63.4997  51  66
MP2    65.8 3.563706 5 61.7003 69.8997  62  70
MP5    68.4 4.393177 5 64.3003 72.4997  64  75
MPR    65.0 3.464102 5 60.9003 69.0997  60  68

alpha: 0.05 ; Df Error: 16
Critical Value of t: 3.008334
```

Test Tukeya - krótki komentarz

Przyklad zastosowania - chrząszcze

```
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = fit)

$group
        diff        lwr       upr     p adj
MP2-MP0  6.4  -1.424772 14.224772 0.1302197
MP5-MP0  9.0   1.175228 16.824772 0.0215290
MPR-MP0  5.6  -2.224772 13.424772 0.2122784
MP5-MP2  2.6  -5.224772 10.424772 0.7784636
MPR-MP2 -0.8  -8.624772  7.024772 0.9909462
MPR-MP5 -3.4 -11.224772  4.424772 0.6098544
```