

Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

28 marca 2012

Przypuśćmy, że chcemy porównać większą (niż dwie) liczbę grup. Aby porównać średnie w kilku grupach, można przeprowadzić **analizę wariancji**.

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Jak widać w serii i wykonaliśmy n_i pomiarów.

Przyjmujemy, że zmienne X_{ij} są niezależne.

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Jak widać w serii i wykonaliśmy n_i pomiarów.

Przyjmujemy, że zmienne X_{ij} są niezależne.

Uwaga

Wariancje są równe dla wszystkich grup!!!

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k.$$

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujący sposób:

Interesuje nas hipoteza zerowa postaci:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujący sposób:

Przynajmniej jedna ze średnich różni się istotnie od pozostałych

Statystyka testową w analizie wariancji jest:

$$F = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/(n-k)}$$

gdzie $n = \sum n_i$ oraz

$$SSA = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2, \quad SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2.$$

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka testowa F ma rozkład Snedecora z $k-1$ i $n-k$ stopniami swobody.

Założenie o tym, że wariancje we wszystkich grupach są równe jest istotne dlatego przed zastosowaniem analizy wariancji należy je sprawdzić używając np. testu Bartletta.

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujący sposób:

Wykonaliśmy k serii pomiarów. Pomiary w serii i oznaczamy przez

$$X_{i1}, \dots, X_{in_i} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_i).$$

Testujemy następującą hipotezę zerową:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2.$$

Hipotezę alternatywną możemy sformułować w następujący sposób:

Przynajmniej jedna z wariancji różni się istotnie od pozostałych

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c} [(n - k) \log(S^2) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log(S_{n_i-1}^2)]$$

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c} \left[(n - k) \log(S^2) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log(S_{n_i-1}^2) \right]$$

gdzie: $S_{n_i-1}^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$, $S^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k S_{n_i-1}^2$ oraz

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k} \right)$$

Statystyka testową jest:

$$\chi^2 = \frac{2.303}{c} \left[(n - k) \log(S^2) - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log(S_{n_i-1}^2) \right]$$

gdzie: $S_{n_i-1}^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$, $S^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k S_{n_i-1}^2$ oraz

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k} \right)$$

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka testowa χ^2 ma rozkład *chi*-kwadrat z $k - 1$ stopniami swobody.

Do pewnych doświadczeń farmakologicznych wybierano są króliki jednorodne pod względem wagi. Wybrano losowo po 5 królików z poszczególnych grup i otrzymano następujące wyniki (w *kg*):

	A	B	C	D
1	2.95	3.20	3.05	3.00
2	2.80	3.05	3.30	3.30
3	3.10	2.90	3.15	2.75
4	3.00	3.05	3.20	2.85
5	3.15	3.05	2.80	3.10

Na poziomie istotności $\alpha = 0.1$ zweryfikować hipotezę, że wariancja wagi królików we wszystkich czterech grupach jest jednakowa.

Bartlett test of homogeneity of variances

data: waga by group

Bartlett's K-squared = 2.067, df = 3, p-value = 0.5586

W tabeli są podane wielkości zbioru pszenicy ozimej otrzymane przy zastosowaniu czterech możliwych dawek azotu jako nawozu. Każdą z dawek azotu zastosowano na 8 poletkach. Zbadać, czy średnia wielkość plonu zależy od użytej ilości nawozu.

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	64.50	64.80	69.30	69.00
2	66.30	66.50	70.30	71.50
3	69.30	66.80	70.00	71.30
4	67.00	67.30	69.00	72.00
5	74.00	77.30	76.30	77.00
6	75.80	71.50	72.00	74.50
7	72.00	74.00	72.50	79.00
8	72.50	74.50	76.80	79.80

Bartlett test of homogeneity of variances

data: plon by group

Bartlett's K-squared = 1.0934, df = 3, p-value = 0.7787

Analysis of Variance Table

Response: plon

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
group	3	86.83	28.944	1.8605	0.1592
Residuals	28	435.61	15.557		

Zadanie

W tabeli znajdują się dane o przeżywalności chrząszczy mącznych hodowanych na różnych pożywkach. Dla tych danych testować będziemy hipotezę, że między różnymi pożywkami nie ma różnic w przeżywalności chrząszczy.

	A	B	C	D	E
MP0	58.00	60.00	51.00	66.00	62.00
MP5	65.00	70.00	64.00	75.00	68.00
MP2	69.00	62.00	70.00	63.00	65.00
MPR	63.00	68.00	68.00	60.00	66.00

Analysis of Variance Table

Response: pozywka

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
group	3	215.35	71.783	3.8387	0.03028 *
Residuals	16	299.20	18.700		

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Uwaga

Jeżeli analiza wariancji nie wykaże istotności różnic między rozpatrywanymi grupami, nie przeprowadza się już dalszych testów. Natomiast kiedy hipoteza zerowa zostanie odrzucona w analizie wariancji, to powstaje pytanie, które z porównywanych populacji są odpowiedzialne za odrzucenie hipotezy zerowej. Chcemy wiedzieć, które z n średnich różnią się między sobą, a które są równe.

Uwaga

Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo na tym wykładzie wyróżnimy następujące

- 1 Test Bonferoniego;

Uwaga

Narzędzi służących do tego celu jest bardzo dużo na tym wykładzie wyróżnimy następujące

- 1 Test Bonferoniego;
- 2 Test Tukeya.

Test Bonferroniego

Jeżeli porównujemy k grup, to porównanie „każdy z każdym” wymaga wykonania $K = \frac{k(k-1)}{2}$ testów. Dla pojedynczego testu statystyka testowa przyjmuje postać:

$$t_{ij} = \frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{s^2 \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

Przy czym

$$s^2 = \frac{SSE}{n - k}.$$

Rozkład statystyki testowej

Przy prawdziwości hipotezy zerowej

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k;$$

statystyka t_{ij} ma rozkład studenta z $n - k$ stopniami swobody.

Uwaga, Uwaga, Uwaga.....

- 1 poziom istotności pojedynczego testu;

Uwaga, Uwaga, Uwaga.....

- 1 poziom istotności pojedynczego testu;
- 2 poziom istotności całej procedury.

Uwaga

Aby poziom istotności całej procedury był na poziomie α poziom istotności pojedynczego testu powinien być na poziomie α/K .

Przykład zastosowania - chrząszcze

Study:

LSD t Test for pozywka

P value adjustment method: bonferroni

Mean Square Error: 18.7

group, means and individual (95 %) CI

	pozywka	std.err	replication	LCL	UCL
MP0	59.4	2.481935	5	54.13853	64.66147
MP2	65.8	1.593738	5	62.42143	69.17857
MP5	68.4	1.964688	5	64.23505	72.56495
MPR	65.0	1.549193	5	61.71586	68.28414

alpha: 0.05 ; Df Error: 16

Critical Value of t: 3.008334

Test Tukeya - krótki komentarz

Tukey multiple comparisons of means
95% family-wise confidence level

```
Fit: aov(formula = fit)
```

```
$group
```

	diff	lwr	upr	p adj
MP2-MP0	6.4	-1.424772	14.224772	0.1302197
MP5-MP0	9.0	1.175228	16.824772	0.0215290
MPR-MP0	5.6	-2.224772	13.424772	0.2122784
MP5-MP2	2.6	-5.224772	10.424772	0.7784636
MPR-MP2	-0.8	-8.624772	7.024772	0.9909462
MPR-MP5	-3.4	-11.224772	4.424772	0.6098544