

Statystyka w analizie i planowaniu eksperymentu

Paweł Błażej

7 maja 2014

Dotychczas zajmowaliśmy się praktycznym zastosowaniem testów istotności nasze zadanie sprowadzało się do testowania hipotez o parametrach rozkładu. Teraz będziemy rozważać ogólniejsze zagadnienia

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;
- testowanie jednorodności n rozkładów w sytuacji, gdy obserwacje należą do k kategorii;

- testowanie zgodności obserwowanej próby z założonym rozkładem teoretycznym. Procedury takie będziemy nazywać **testami zgodności**;
- testowanie jednorodności n rozkładów w sytuacji, gdy obserwacje należą do k kategorii;
- testowanie niezależności.

- 1 Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?

- 1 Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?
- 2 Zaobserwowano 60 kolejnych niezależnych rzutów kostką. Czy na tej podstawie można stwierdzić (z pewnym prawdopodobieństwem błędu), że kostka nie jest symetryczna?

- 1 Rzucano dwiema monetami. Czy można stwierdzić, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła tymi monetami jest jednakowe?
- 2 Zaobserwowano 60 kolejnych niezależnych rzutów kostką. Czy na tej podstawie można stwierdzić (z pewnym prawdopodobieństwem błędu), że kostka nie jest symetryczna?
- 3 krzyżując homozygoty recesywne z heterozygotą otrzymano 234 osobników potomnych z czego 122 osobniki są homozygotyczne a 112 heterozygotyczne. Czy to powinno skłonić nas do odrzucenie teorii o równomiernym rozkładzie tych typów osobników ?

Rzucano monetą (monetami) ...

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

$$H_0 \quad p = p_0;$$

$$H_1 \quad p \neq p_0.$$

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

$$H_0 \quad p = p_0;$$

$$H_1 \quad p \neq p_0.$$

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Test dla proporcji - przypadek jednej próby

$$H_0 \quad p = p_0;$$

$$H_1 \quad p \neq p_0.$$

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Uwaga

Korzystamy z faktu, że ta statystyka testowa u przy prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie

Na 800 zbadanych pacjentów szpitala 320 miało grupę krwi „0”. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że proporcja pacjentów z tą grupą krwi wynosi 0.35.

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

$$H_0 \quad p_1 = p_2;$$

$$H_1 \quad p_1 \neq p_2.$$

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

$$H_0 \quad p_1 = p_2;$$

$$H_1 \quad p_1 \neq p_2.$$

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

przy czym $\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$, oraz $n = \frac{n_1 n_2}{m_1 + m_2}$.

Test dla proporcji - przypadek dwu prób

$$H_0 \quad p_1 = p_2;$$

$$H_1 \quad p_1 \neq p_2.$$

Statystyka testowa

$$u = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

przy czym $\bar{p} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$, $\bar{q} = 1 - \bar{p}$, oraz $n = \frac{n_1 n_2}{m_1+m_2}$.

Uwaga

Korzystamy z faktu, że ta statystyka testowa u przy prawdziwości hipotezy H_0 ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie

Przy kontroli pracy dwu central telefonicznych w pewnym dniu stwierdzono, że na 200 połączeń w centrali *A* 16 było pomyłkowych. Natomiast na 100 połączeń w centrali *B* złych połączeń było 10. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikować hipotezę, że procent złych połączeń jest jednakowy w obu centralach telefonicznych.

Uwaga

W praktyce w sytuacjach takich jak powyżej testy dla proporcji stosuje się rzadko, ponieważ równie dokładną odpowiedź można uzyskać stosując tak zwany **test chi - kwadrat**.

Uwaga

W praktyce w sytuacjach takich jak powyżej testy dla proporcji stosuje się rzadko, ponieważ równie dokładną odpowiedź można uzyskać stosując tak zwany **test chi - kwadrat**.

Uwaga na boku

Test chi - kwadrat ma także przewagę nad testem dla proporcji, że nie wymaga prób większych niż 100 pomiarów i może być stosowany przy skalach nominalnych, które nie są dychotomiczne.

Test χ^2 zgodności wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie testowe:

H_0 : próba pochodzi z rozkładu G ;

Test χ^2 zgodności wprowadzenie

Rozważmy następujące zagadnienie testowe:

H_0 : próba pochodzi z rozkładu G ;

H_1 : próba nie pochodzi z rozkładu G .

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęściej stosowanym testem zgodności jest test χ^2 . Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęściej stosowanym testem zgodności jest test χ^2 . Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;
- n_i liczba jednostek posiadających k -tą kategorię;

Test χ^2 zgodności dla jednej próby

Najczęściej stosowanym testem zgodności jest test χ^2 . Statystyka testowa przyjmuje postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

gdzie:

- k liczba kategorii;
- n_i liczba jednostek posiadających k -tą kategorię;
- \bar{n}_i liczebności hipotetyczne.

Uwaga

Przy prawdziwości H_0

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \bar{n}_i)^2}{\bar{n}_i}$$

ma rozkład χ^2 o liczbie stopni swobody $s = k - 1$.

- $k = 2$ (liczba kategorii);

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

- $k = 2$ (liczba kategorii);
- $n_1 = 320, n_2 = 480$ (liczba jednostek przypadających na k -tą kategorię);

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

- $k = 2$ (liczba kategorii);
- $n_1 = 320, n_2 = 480$ (liczba jednostek przypadających na k -tą kategorię);
- $\bar{n}_1 = 280, \bar{n}_2 = 520$ liczebności hipotetyczne.

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

Obliczenia

$$\chi^2 = \frac{(320 - 280)^2}{280} + \frac{(480 - 520)^2}{520} = 8.79120879120879$$

Zastosowanie testu χ^2 - zadanie z grupą krwi

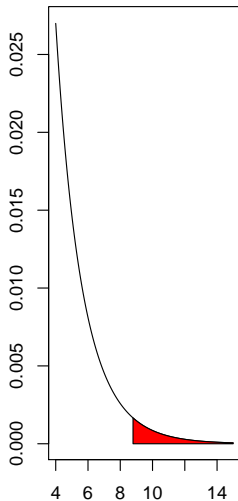
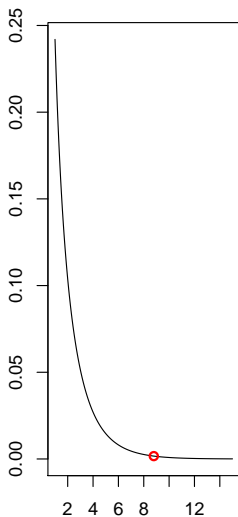
Obliczenia

$$\chi^2 = \frac{(320 - 280)^2}{280} + \frac{(480 - 520)^2}{520} = 8.79120879120879$$

Obliczenia

P wartość wynosi 0.00302685618912935.

Jak to teraz zinterpretować?



A jak to wygląda w R?

Chi-squared test for given probabilities

```
data: grupa_krwi
```

```
X-squared = 8.7912, df = 1, p-value = 0.003027
```

Czy kostka jest uczciwa ?

Rzuciliśmy 200 razy kostką. Otrzymaliśmy wyniki:

1	2	3	4	5	6
37	32	35	25	39	32

wynik testu:

Chi-squared test for given probabilities

data: rzut_kostka

X-squared = 3.64, df = 5, p-value = 0.6023

Przygody muszek owocowych

Czy grupę 234 osobników potomnych możemy traktować jako próbę z populacji, w której proporcja muszek o oczach czerwonych wynosi 50%?

.	Czerwone	Białe
Obserwowane	122	112
Spodziewane	117	117

Chi-squared test for given probabilities

```
data: muszka_owocowa
```

```
X-squared = 0.4274, df = 1, p-value = 0.5133
```

Kojarząc heterozygoty dziwaczka o różowych kwiatach otrzymaliśmy w potomstwie następujące liczby osobników o kwiatach:

- czerwonych (C) 22
- różowych (R) 43
- białych (B) 17

Czy prawdziwe jest zatem twierdzenie, że w przypadku gdy homozygoty dominujące różnią się od heterozygot, to w drugim pokoleniu trzy genotypy powinny pojawić się w proporcji 1 : 2 : 1.

Przygody dziwaczka

.	Czerwone	Różowe	Białe
Obserwowane	22	43	17
Spodziewane	20.5	41	20.5

Chi-squared test for given probabilities

data: kwiatki

X-squared = 0.8049, df = 2, p-value = 0.6687

Dalsze zastosowanie testu chi - kwadrat

Za pomocą testu chi kwadrat można także porównywać ze sobą różne rozkłady empiryczne i w ten sposób badać związek między dwoma cechami nominalnymi.

Przygody ślimaków winniczków

.	Grunt	Roślinność zielna	Pnie drzew	Sum w
Młode	52	43	17	112
Stare	108	15	74	197
Sum kol	160	58	91	309

Czy młode ślimaki różnią się od dorosłych skłonnością do przebywania w różnych siedliskach?

Przygody ślimaków winniczków - tabela licznosci oczekiwanych

.	Grunt	Roślinność zielna	Pnie drzew	Sum w
Młode	57.99	21.02	32.98	112
Stare	102.01	36.98	58.02	197
Sum kol	160	58	91	309

Jak otrzymać tę tabelę?

Tablica wielodzielcza

Obserwowane

	1	...	l	Sum w
1	n_{11}	...	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}	...	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	n_{k1}	...	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
Sum kol	$n_{\cdot 1}$...	$n_{\cdot l}$	N

Oczekiwane

	1	...	l	Sum w
1	$\frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{N}$...	$\frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot l}}{N}$	$n_{1\cdot}$
2	$\frac{n_{2\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{N}$...	$\frac{n_{2\cdot} \cdot n_{\cdot l}}{N}$	$n_{2\cdot}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$\frac{n_{k\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{N}$...	$\frac{n_{k\cdot} \cdot n_{\cdot l}}{N}$	$n_{k\cdot}$
Sum kol	$n_{\cdot 1}$...	$n_{\cdot l}$	N

Uwaga

Statystyka testowa przyjmie postać:

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{N})^2}{\frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{N}}$$

Statystyka ta ma rozkład χ^2 o $(k-1)(l-1)$ stopniach swobody.

Pearson's Chi-squared test

```
data:  slimaki
```

```
X-squared = 49.1585, df = 2, p-value = 2.115e-11
```

Zadanie z centralami telefonicznymi początek wykładu

Obserwowane

	Poł	Awaria	Suma w
Centr A	184	16	200
Centr B	90	10	100
Suma kol	274	26	300

Tabela dwudzielcza

a	b	$a + b$
c	d	$c + d$
$a + c$	$b + d$	N

Uwaga

Statystyka testowa przyjmie postać:

$$\chi^2 = \frac{n|ad - cb|}{(a + c)(b + d)(c + d)(a + b)}$$

Statystka ta ma rozkład χ^2 o 1 stopniu swobody.

Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction

data: centrala_telefoniczna

X-squared = 0.1316, df = 1, p-value = 0.7168